Núm. 3 | Febrero 2025

ANÍMATE

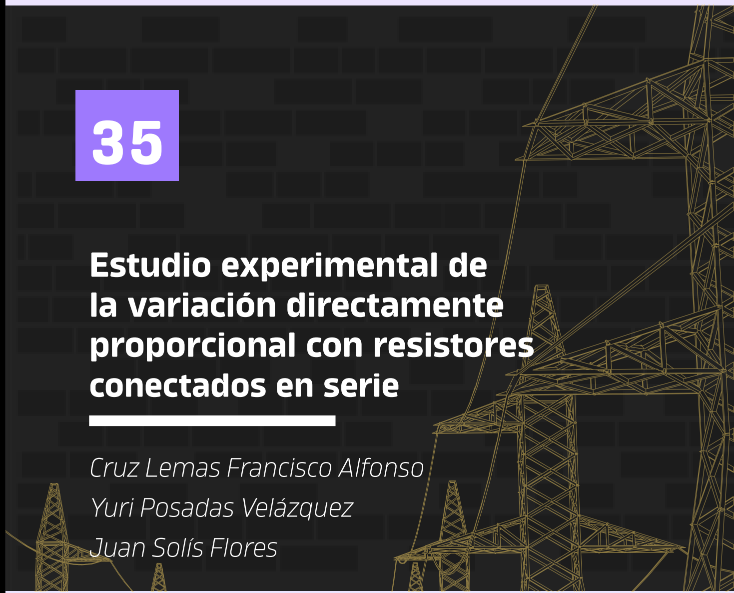
REVISTA DE DIVULGACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

La enseñanza de Euclides

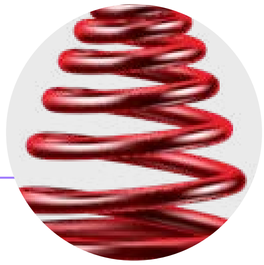
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

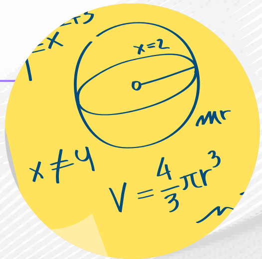
Anímate. Revista de divulgación de las matemáticas, año 2, número 3, primavera-verano de 2025, es una publicación semestral editada por la Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CP 04510, Alcaldía Coyoacán, Ciudad de México, a través del Colegio de Ciencias y Humanidades, lateral de Insurgentes Sur, esq. Circuito Escolar, 2do. piso, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, Alcaldía Coyoacán, Ciudad de México, teléfono 5622-0025. Correo electrónico: animate@cch.unam.mx. Editor responsable: Héctor Baca Espinoza. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo del Título de la red de cómputo: en trámite, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor (INDAUTOR). ISSN: en trámite, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.URL: https://gaceta.cch.unam.mx/es/editorial/revistas/la-pandemia-y-las-ciencias-experimentales. La responsabilidad de los textos publicados en Anímate, recae exclusivamente en sus autores y su contenido no necesariamente refleja el criterio de la Institución.

CONTENIDO



CONTENIDO





Presentación

Para el tercer número de la revista *Anímate*, titulado *La enseñanza de Euclides*, dieciséis docentes del Colegio de Ciencias y Humanidades comparten nueve artículos sobre diversos enfoques teóricos, multidisciplinarios y experimentales de las matemáticas.

Por ejemplo, en el artículo “Exploración de las nociones sobre frecuencia relativa en estudiantes de bachillerato”, Sandra Areli Martínez Pérez y Miguel Ángel Huerta Vázquez analizan los resultados de una encuesta aplicada a estudiantes sobre su comprensión del concepto de frecuencia relativa.

En “Estudio experimental de la variación directamente proporcional con resistores conectados en serie”, Francisco Alfonso Cruz Lemas, Yuri Posadas Velázquez y Juan Solís Flores presentan los hallazgos de un equipo de alumnos del CCH que llevó a cabo este experimento.

Por su parte, Diego González Moreno, en “El algo-ritmo de Euclides”, explica cómo el método desarrollado por Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números enteros puede aplicarse a la creación de ritmos musicales. Estos llamados "ritmos euclidianos" se caracterizan por distribuir uniformemente un número determinado de golpes en un intervalo de tiempo.

Esta edición también incluye colaboraciones sobre las matemáticas y su aplicación en funciones trigonométricas, como el estudio del nivel del mar. Además, se presenta una propuesta para la formación y práctica docente en el Colegio, así como estrategias multidisciplinarias para equipos interescolares.

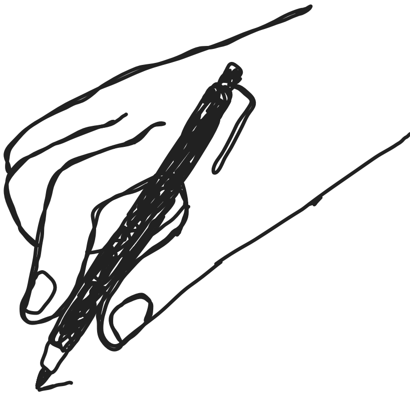
La Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades y el comité editorial de Anímate confían en que este número contribuirá al ejercicio docente en las aulas y fomentará el interés de los estudiantes por las matemáticas.

Benjamín Barajas Sánchez

DIRECTOR GENERAL DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Profesionalización docente para el **desarrollo de estrategias multidisciplinarias en equipos interescolares**

Por:
Ernesto Márquez Fragoso
María del Rocío Flores Marín
ernesto.marquez@cch.unam.mx



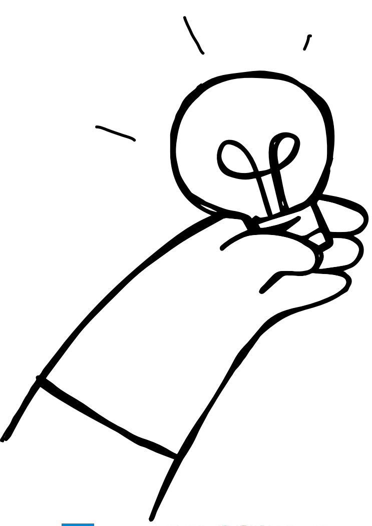
Agradecemos al programa PASPA de DGAPA y a la UNAM por los apoyos para el desarrollo de este proyecto.

RESUMEN

Las funciones racionales son parte de la segunda unidad de Matemáticas IV, y se definen como el cociente de dos polinomios; existen varias aplicaciones en la vida cotidiana, por ejemplo, se pueden utilizar para el cálculo de velocidades o distancias, el ritmo de trabajo de personas o máquinas e incluso en la medicina y la economía para modelar escenarios reales, entre otras.

Respecto de la relevancia y el área de incidencia del proyecto, es importante mencionar que no sólo fue de corte matemático, también se estudiaron situaciones de trabajo colaborativo, necesidades de formación docente, relaciones sociales entre adolescentes, manejo de distintos lenguajes y comunicación digital e integración de TAC, entre otros.

Palabras clave: función racional, tsunami, multidisciplina, proyectos interescolares.



INTRODUCCIÓN

Dadas las características de este proyecto desarrollado en la Universidad de Siracusa, se eligió para la experiencia en campo la escuela Jamesville DeWitt High school (JD) junto con el plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), en los que las actividades se desarrollan a partir de un esquema multilingüe de español, inglés y lenguaje matemático, para reunir a estudiantes de bachillerato tanto de México como de Estados Unidos en equipos internacionales de trabajo colaborativo.

Además de los estudiantes, colaboraron docentes de ambas instituciones para el desarrollo, diseño y planeación de las estrategias, con el objetivo de lograr que los temas elegidos se pudieran trabajar a partir de un proyecto de modelamiento matemático virtual.

Los modelos matemáticos fueron desarrollados a partir de una función racional, a la cual se le alimentó con datos relacionados con el fenómeno de los *tsunamis*, la marea y el tiempo de desplazamiento desde la fuente hasta la costa. Los modelos matemáticos para describir estos fenómenos físicos se conciben como explicaciones racionales para analizar sus mecanismos, entender y predecir comportamientos similares. Estos estudios son muy útiles y peculiares porque muestran el comportamiento del fenómeno, basados en una lógica matemática (Rigalli, Aguirre, Armendáriz, & Cassiraga, 2003).

En ambas escuelas, los jóvenes tenían ya un conocimiento general de funciones habiendo trabajado del tipo polinomial, radical y algunas de las habilidades generales tales como factorización, tabulación, graficación y transformación de las funciones. Es por eso que se eligió un modelo racional simple, en el cual existían los parámetros a y b, los cuales deberían de ser específicos para cada uno de los tsunamis a partir de los datos proporcionados o calculados para la marea y el desplazamiento.

PRESENTACIÓN: EL RECURSO

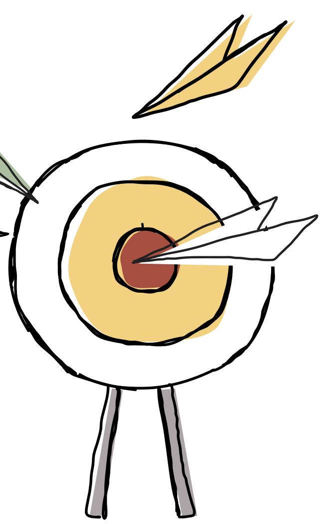
El proyecto se desarrolló en la escuela JD con un grupo de 23 estudiantes de la materia de álgebra 2, de entre 15 y 17 años, apoyados por el profesor Charles Clinton, en Nueva York, y por otro lado con 19 estudiantes coordinados por la maestra Rocío Flores Marín en el CCH Sur en la Ciudad de México; el profesor encargado de coordinar el proyecto en ambas escuelas fue el profesor Ernesto Márquez Fragoso, adscrito al CCH Sur, pero que desarrollaba una estancia de investigación en la Syracuse University en Nueva York. Se trabajó en 11 equipos a los que se les distribuyeron datos de la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de los EE. UU. (NOAA Center for Tsunami Research - Tsunami Modeling and Research) de 11 tsunamis distintos, la mayoría de estos en el continente asiático. El armado de los equipos se realiza de forma aleatoria, cuidando que sean de perfiles heterogéneos de alumnos.

Se llevó a cabo el diseño de una función sujeta a adaptaciones paramétricas de la secuencia de aprendizaje y algunas herramientas de apoyo, tales como una encuesta inicial, una página web, algunos videos generales con explicaciones y bases de datos de los tsunamis para cada uno de los equipos. Esto se hizo en formatos o documentos bilingües, los cuales representaron un reto para los estudiantes que en algunos casos lograron trabajar ocupando un segundo idioma.

Conforme se desarrolló el proyecto se realizaron algunas modificaciones para lograr ajustarse a la naturaleza y condiciones existentes. Se cambiaron algunos elementos de los formatos del cuestionario de las bases de datos y de los productos finales solicitados.

Desde el punto de vista matemático, se observó que, aunque los jóvenes tienen distinta formación, poseen similitudes respecto de la cultura básica matemática y científica, manejan conceptos físicos comunes y relacionan fácilmente los modelos matemáticos con sucesos naturales. Este pensamiento interdisciplinario y sus conocimientos algebraicos y cartesianos fueron piezas fundamentales para desarrollar estas actividades.

Algunas observaciones que se hicieron fueron las siguientes: aunque evidentemente se sienten más cómodos trabajando entre sus compañeros de clase, se muestran receptivos, expectantes y emocionados por emprender un proyecto con jóvenes y docentes de otras latitudes, todos los jóvenes están familiarizados con los programas de comunicación, las herramientas Google de trabajo colaborativo y con algún software para la elaboración de prestaciones, así como con la navegación en internet.



RECURSO DIDÁCTICO

PROYECTO TSUNAMI

La Universidad de Siracusa, junto con la preparatoria de Jamesville DeWitt y El CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades, Sur) invitan a sus estudiantes a realizar una actividad de investigación matemática con un componente social, en donde además de graficar y analizar funciones racionales, conocerán la cultura y el contexto de jóvenes de Nueva York y la Ciudad de México.

CONTENIDO

1. Formación de grupos de trabajo.
2. Presentación de los equipos a través de redes sociales o correo electrónico.
3. Conocimientos previos y herramientas tecnológicas.
4. Problema de graficación de funciones.
5. Sesiones de comunicación.
6. Presentación de un video con el análisis de la actividad, los integrantes y su contexto educativo.

1. Formación de grupos de trabajo

Los equipos contarán con al menos un estudiante de cada escuela (JD y CCH), los cuales llenarán un formulario y recibirán por correo electrónico el formato de la actividad y el contacto de sus compañeros para iniciar el tema.

Todos deberán dar lectura al documento que describe la actividad e ingresar al documento en Google Drive para poder trabajar en conjunto.

De forma individual, cada uno deberá presentarse con una biografía corta, en donde escriban su nombre, ciudad, edad, familia, pasatiempos, amigos, deportes y escuela. El tamaño del texto recomendado es de media página.

2. Presentación de los equipos a través de redes sociales o correo electrónico

Los estudiantes pueden compartir con su equipo algunas redes sociales para conocerse mejor. Esto no es obligatorio. La comunicación puede llevarse a cabo solamente por correo o mediante el documento compartido.

El producto final del proyecto deberá estar integrado en un solo video de máximo 1:30 min.

Es importante que cualquier aportación que realicen los estudiantes se registre en el documento colaborativo y el resto del equipo pueda comentarlo, aprobarlo o tomarlo como base para continuar el proyecto.

3. Conocimientos previos y herramientas tecnológicas

Durante la realización de estas actividades se revisarán los siguientes temas:

- Funciones racionales
- Dominio y rango de funciones
- Gráfica de funciones
- Recolección de datos
- Interpretación de un modelo matemático
- Asíntotas verticales y horizontales
- Recursos digitales.

Como se ha mencionado, los equipos usarán las siguientes aplicaciones para el desarrollo de la actividad:

Recurso digital	Uso recomendado
Correo electrónico	Invitación para formar equipo y un documento compartido en Google Drive.
Formulario Google Drive	Generar una base de datos de los estudiantes participantes en el proyecto. Generación de una encuesta final para evaluar las actividades.
Google docs	Para colaborar en el desarrollo de la actividad con análisis, gráficas, etc.
GeoGebra	Modelado de la función racional y análisis.
WeVideo	Plataforma colaborativa para el desarrollo de videos con múltiples usuarios.
Youtube	Plataforma para compartir videos.

4. Problema de graficación y análisis de funciones

Nivel del mar en un tsunami

Un tsunami es una ola o serie de olas que se producen en una masa de agua al ser empujada violentamente por una fuerza que la desplaza verticalmente. Terremotos, volcanes, derrumbes costeros o subterráneos e incluso explosiones de gran magnitud pueden generar este fenómeno.

Para el modelado matemático, debemos tomar en cuenta distintos tipos de datos. ¿Qué variables físicas pueden intervenir en este suceso?
¿Qué tipo de funciones podemos establecer para entender su comportamiento?

En este caso analizaremos un modelo que describe la altura de la marea sobre la costa ($f(x)=y$) y el tiempo que tarda el tsunami en llegar a la playa (x). El tiempo se medirá en horas (h) y la altura en metros (m). Se sugiere la siguiente función racional:

$$y=\frac{ax}{x-b}$$

Para entender cómo funciona y qué significan los parámetros a y b, sugerimos observar el modelo en Geogebra (puedes graficar en geogebra.org) y usando deslizadores para las constantes a y b, lograrás entender qué significan.

Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Por qué tenemos una función racional para este caso?
2. Explica qué representan los 4 extremos de la gráfica.
3. ¿Qué sucede cuando se modifica el valor del parámetro a?
4. ¿Qué pasa cuando cambia el parámetro b?
5. ¿Qué representan las asíntotas horizontales y verticales y cómo se encuentran?
6. ¿Cómo se verá la playa en el momento en que la función se acerca a la asíntota vertical?
7. Realiza una investigación sobre algunos tsunamis ocurridos en años recientes y reporta los datos más relevantes: localización, fecha, hora del suceso de origen (terremoto submarino, erupción volcánica, etc.), hora de llegada del tsunami a la primera costa, altura media y máxima, etcétera.
8. Elige algunos valores definidos para a y b y realiza una tabla de valores para las primeras horas después del sismo (origen del tsunami).
9. Describe el dominio y el rango de la función.

5. Sesiones de comunicación

Es importante que antes, durante y después de entender el problema, resolverlo y analizarlo, exista comunicación constante para saber cuál es el avance del equipo, qué dificultades se tienen, cómo pueden integrar imágenes, textos o pequeños clips al video final, etcétera.

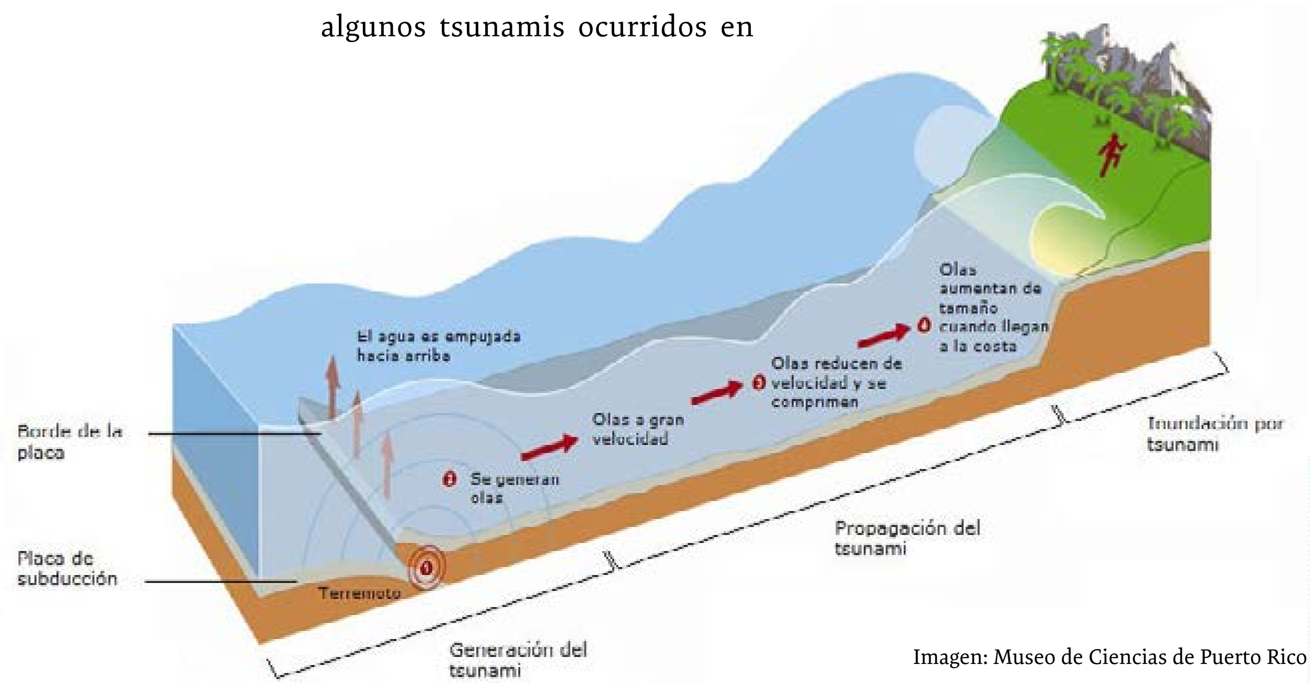


Imagen: Museo de Ciencias de Puerto Rico

6. Presentación de un video con el análisis de la actividad, los integrantes y su contexto educativo

Todos los integrantes del equipo deberán colaborar de forma activa en la realización del proyecto; éste te ayudará a entender mejor el uso y aplicación de las funciones racionales y contribuirá a desarrollar habilidades de trabajo colaborativo, así como al conocimiento de otros contextos académicos.

Rúbrica de evaluación del Proyecto Tsunami
Equipo:

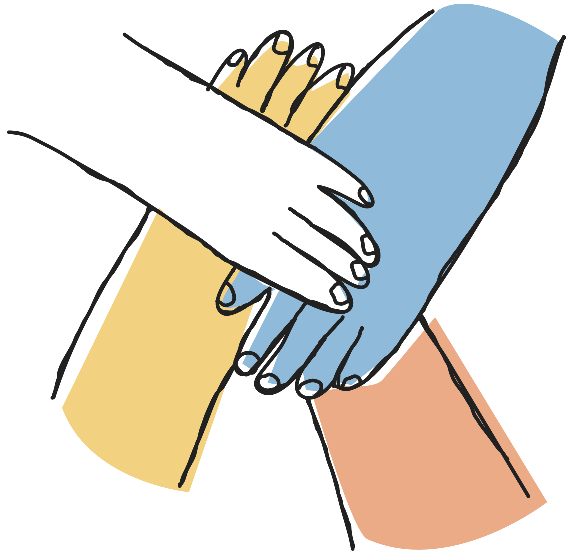
Rubro	Nivel de desarrollo: Completo, Medio, Incompleto	Calidad del desarrollo: Alta, Media, Baja
Biografías		
¿Por qué tenemos una función racional para este caso? Es decir, justifica en términos comparativos la función de tipo racional.		
Explica qué representan los 4 extremos de la gráfica. Estos se relacionan con los niveles de marea y tiempos.		
¿Qué sucede cuando se modifica el valor del parámetro a?		
¿Qué pasa cuando cambia el parámetro b?		
¿Qué representan las asíntotas horizontales y verticales y cómo se encuentran?		
¿Cómo se verá la playa en el momento en que la función se acerca a la asíntota vertical?		
Realiza una investigación sobre algunos tsunamis ocurridos en años recientes (3 eventos es suficiente) y reporta los datos más relevantes: localización, fecha, hora del suceso de origen (terremoto submarino, erupción volcánica, etc.), hora de llegada del tsunami a la primera costa, altura media y máxima, etcétera.		
Elige una pareja de valores definidos para a y b y realiza una tabla de valores para las primeras horas después del sismo (origen del tsunami). Describe el dominio y el rango de la función que ustedes crearon.		
Desarrolla aspectos sociales relacionados con el tsunami		
¿Cómo trabajó en equipo?		
Edición del producto		

CONCLUSIONES

Es viable el desarrollo de actividades con esquemas como el que se presenta, en donde no sólo intervienen varios idiomas sino diferentes contextos, espacios, profesores y formas de trabajo de los docentes y los alumnos. A diferencia de una clase tradicional, en donde se puede ver un poco de teoría y posteriormente algunos ejemplos y gráficas, en esta experiencia vivencial se puede asumir un aprendizaje significativo, no sólo por la interacción entre pares sino por el fomento a la autonomía, tanto en la investigación como en la toma de decisiones en todas las etapas del proyecto. Además, los alumnos quedan altamente motivados con perspectivas relacionadas con el tema o estudios profesionales del ámbito científico y con conocidos y amigos de otros países, lo cual amplía su panorama profesional.

En términos del docente, la formación profesional se ve enriquecida no sólo a partir de la teoría del aprendizaje colaborativo y el uso de diversas aplicaciones tecnológicas de aprendizaje y comunicación, sino también en la práctica de estrategias diversas a su contexto original, elementos de seguimiento, de retroalimentación y de evaluación de las actividades y los aprendizajes. Particularmente, se emplearon diversos modelos de coenseñanza como: uno enseña-uno observa, paralela y coenseñanza en equipo (Friend & Cook, 2014).

En perspectiva, es importante dar continuidad y compartir con los docentes de nuestras instituciones, en cada uno de nuestros países, tanto la experiencia y los materiales y videos desarrollados



como la búsqueda continua de un desarrollo profesional en diversos ámbitos, el gusto por el desarrollo de investigaciones y la necesidad del trabajo conjunto con la posibilidad del apoyo de docentes y alumnos de diversas instituciones a nivel internacional.

Los modelos planteados por los alumnos describen los parámetros de ubicación de las asíntotas de forma adecuada, aunque el entendimiento y la explicación de los modelos es muy simple y deberá fortalecerse en versiones posteriores.

Ejemplos de trabajos de los estudiantes: https://sites.google.com/u/0/d/1WB-SaWzNHbTBBPqrBU8hJ8679vU39U1Pe/preview

FUENTES CONSULTADAS:

FRIEND, M., & Cook, L. (2014). *Interactions: Collaboration Skills for School Professionals.* Pearson.

RIGALLI, A., Aguirre, C., Armendáriz, M., & Cassiraga, G. (2003). *Formulación de modelos matemáticos de fenómenos biológicos.* Rosario.

VERA, J., & Moreno, N. (2012). *Propuestas de actividades con TAC para el aprendizaje*. (C. I. Leer.es, Ed.)

Comunidades profesionales de aprendizaje: **una propuesta para mejorar la formación y práctica docente de los profesores de matemáticas del CCH-UNAM.**

Por:
Huerta Vázquez Miguel Ángel[1]
Martínez Pérez Sandra Areli[2]

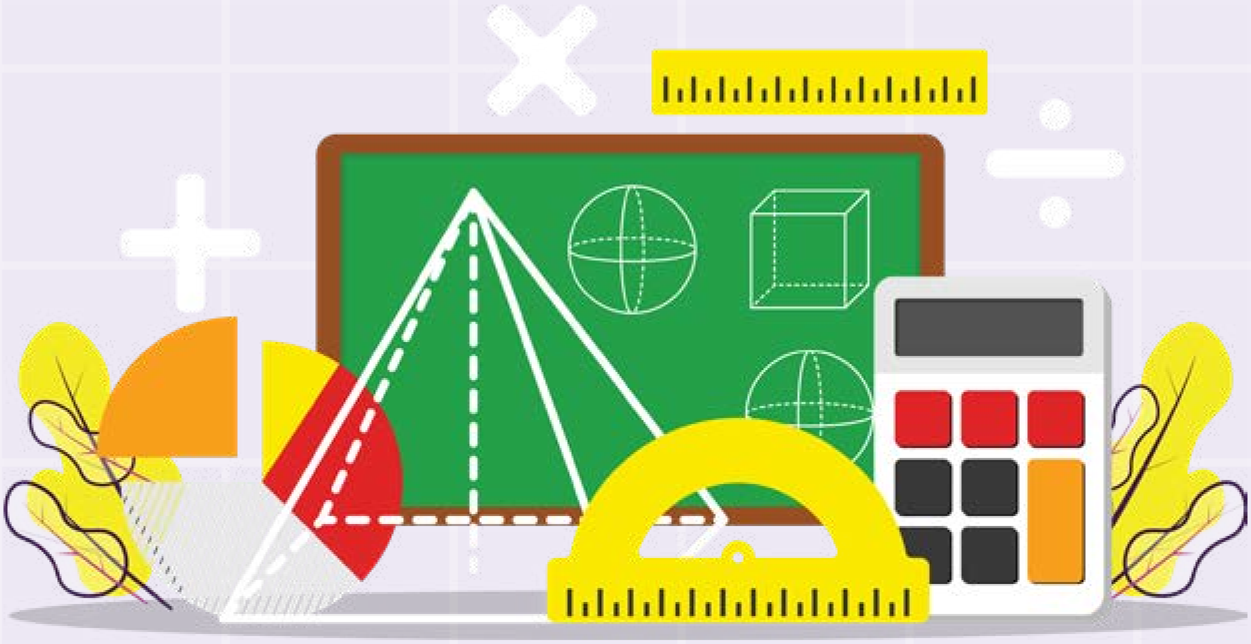
RESUMEN/ABSTRACT:
Este artículo propone la implementación de comunidades profesionales de aprendizaje (CPA) como estrategia para mejorar la formación y prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM. Se argumenta que las CPA pueden subsanar las deficiencias de la formación docente tradicional, al ofrecer espacios colaborativos y reflexivos para el desarrollo de un conocimiento matemático para la enseñanza más robusto y situado. Se fundamenta teóricamente las CPA, destacando sus características y beneficios reportados en estudios previos. Luego, presenta una propuesta de diseño e implementación de una CPA en el CCH-UNAM, basada en ciclos iterativos de planeación, puesta a prueba y análisis de secuencias didácticas. Se sugieren estrategias para promover la reflexión docente y una metodología de investigación cualitativa para documentar los efectos de la CPA.

Se espera que la participación en la CPA fortalezca los conocimientos y prácticas de enseñanza de los profesores, adoptando una postura reflexiva y valorando el aprendizaje colaborativo. En el plano teórico se busca aportar evidencias sobre los procesos de construcción del conocimiento docente en el contexto de una CPA. Se concluye que las CPA son una herramienta valiosa para mejorar la formación docente en matemáticas en el CCH-UNAM.

Palabras clave: Comunidades profesionales de aprendizaje, Formación docente en matemáticas, Reflexión docente.

[1] Profesor de Asignatura definitivo de matemáticas del CCH Azcapotzalco. Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa (Cinvestav-IPN), Tel. 55 28 78 69 82, Correo electrónico: miguelangel.huertav@cch.unam.mx

[2] Profesora de Asignatura de matemáticas del CCH Azcapotzalco. Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa (Cinvestav-IPN),Tel. 55 13 33 98 57. Correo electrónico: sandraareli.martinez@cch.unam.mx



INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM es un pilar fundamental para la formación integral de los estudiantes. Sin embargo, la formación inicial y continua de los profesores de esta área ha enfrentado desafíos que requieren atención; en particular es una problemática que atraviesa a todos los subsistemas de educación media superior en México.

Al respecto, hasta el año 2014 la mayoría de los docentes en México no recibían una preparación adecuada en matemáticas y su didáctica, lo que se reflejaba en su práctica (Sosa & Ribeiro, 2014). Los programas de formación disponibles en casi todos los subsistemas públicos de bachillerato suelen ser esfuerzos aislados y desarticulados, con poco impacto en la mejora de la enseñanza.

Ante esta problemática, las comunidades profesionales de aprendizaje (CPA) emergen como una estrategia prometedora para el desarrollo profesional docente. Estas comunidades se definen como agrupaciones de profesores que comparten propósitos, se responsabilizan mutuamente por el aprendizaje de sus estudiantes, colaboran para mejorar su práctica y participan en la toma de decisiones (Sowder, 2007). Diversos estudios han documentado los beneficios de estas comunidades para fortalecer los conocimientos y habilidades pedagógicas de los docentes (Chauraya & Brodie, 2017; Dogan *et al*., 2016).

1 Fundamentación teórica

1.1 La formación docente en matemáticas en el CCH-UNAM

El CCH-UNAM fue creado en 1971 con un modelo educativo innovador que buscaba fomentar el aprendizaje activo y la autonomía de los estudiantes. Sin embargo, desde sus inicios ha enfrentado dificultades para conformar una planta docente con la formación pedagógica y disciplinaria requeridas. La mayoría de los profesores contratados eran egresados universitarios sin experiencia en la enseñanza y con poco conocimiento del nuevo modelo (UNAM, 2019).

A lo largo de su historia, el CCH-UNAM ha implementado diversos programas de formación docente, tales como el Centro de Didáctica, el Programa de Superación Académica y la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS). No obstante, estos esfuerzos han sido insuficientes y fragmentados. Los profesores los perciben como desconectados de su práctica y con poco impacto en la mejora de su enseñanza (UNAM, 2019). En el caso específico de matemáticas, la falta de una formación sólida en la disciplina y su didáctica sigue siendo un desafío pendiente.

2.2 Comunidades profesionales de aprendizaje

Una comunidad profesional de aprendizaje se entenderá como una agrupación en la cual se comparten propósitos, generalmente con el entendimiento de que los docentes son responsables unos con otros por lograr sus metas; coordinar sus esfuerzos para asegurar el aprendizaje de los estudiantes, aprender juntos para mejorar su práctica y compartir responsabilidades para la toma de decisiones sobre asuntos pertenecientes a la mencionada comunidad (Sowder, 2007, p. 185). Se caracterizan por,

- Compromiso colectivo para aprender y aplicar nuevos conocimientos.
- Relaciones profesionales intensivas entre participantes.
- Revisión de las prácticas docentes de los compañeros.
- Altos niveles de participación en la reforma del sistema educativo.

Estas comunidades operan bajo la premisa de que el aprendizaje docente se construye socialmente, a través del diálogo y la reflexión sobre experiencias auténticas de la práctica. Al compartir conocimientos, planear juntos, observar sus clases

La reflexión permite a los docentes examinar críticamente sus creencias y acciones, identificar áreas de mejora, resolver problemas y construir nuevo conocimiento a partir de la experiencia.

y analizar el trabajo de los estudiantes, los profesores desarrollan una comprensión más profunda de la enseñanza y el aprendizaje (Chauraya & Brodie, 2017).

Diversos estudios han reportado los beneficios de las comunidades profesionales de aprendizaje. Dogan *et al.* (2016) encontraron que los docentes que participan en ellas tienden a ampliar sus conocimientos disciplinarios y pedagógicos, a transitar de prácticas tradicionales a enfoques basados en la indagación, y a enfocar su enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes. Por su parte, Chauraya y Brodie (2017) documentaron cómo el trabajo en estas comunidades ayudó a profesores de matemáticas a mejorar la comprensión conceptual de sus alumnos a través del diseño de tareas que promovían el razonamiento y la discusión.

1.2 La reflexión en las comunidades profesionales de aprendizaje

Un elemento clave que distingue a las CPA es la reflexión sistemática sobre la práctica. Desde las perspectivas de Dewey (1989) y Schön (1983), la reflexión permite a los docentes examinar críticamente sus creencias y acciones, identificar áreas de mejora, resolver problemas y construir nuevo conocimiento a partir de la experiencia.

Schön (1983) distingue entre la 'reflexión en la acción', que ocurre durante la práctica y permite tomar decisiones inmediatas, y la 'reflexión sobre la acción', que implica un análisis retrospectivo para aprender de lo vivido. Ambos tipos de reflexión son fundamentales en las comunidades profesionales de aprendizaje, ya que favorecen la toma de conciencia de los saberes tácitos y su transformación en conocimiento profesional explícito y compartido.

2 Propuesta de implementación

2.1 Diseño de una comunidad profesional de aprendizaje

Se propone conformar una CPA con profesores de matemáticas del CCH-UNAM, con el propósito de fortalecer su formación y práctica docente a través de la reflexión y la construcción colaborativa de conocimientos. La comunidad operará bajo los siguientes principios:

- Participación voluntaria y compromiso con el aprendizaje individual y colectivo.
- Foco en problemáticas auténticas de la enseñanza de las matemáticas en el CCH.
- Clima de confianza, respeto y apoyo mutuo entre los participantes.
- Producción conjunta de recursos y estrategias didácticas.
- Reflexión sistemática sobre la práctica, sustentada en evidencias del aprendizaje de los alumnos.
- Acompañamiento de expertos en educación matemática que orienten el proceso.

Una forma de organización sugerida sería seguir un ciclo iterativo de 'Enseñanza-Reflexión' (Huerta-Vázquez *et al.*, 2022), que comprende las siguientes etapas:

1. Planeación/reflexión colectiva: Los profesores diseñan colaborativamente una secuencia didáctica sobre un tema o habilidad matemática, considerando las dificultades de aprendizaje de sus alumnos y estrategias para atenderlas.
2. Puesta a prueba/reflexión individual: Un profesor implementa la secuencia en su aula, mientras los demás observan y registran evidencias del pensamiento y desempeño de los estudiantes.
3. Análisis-síntesis/reflexión colectiva: El equipo se reúne para discutir los hallazgos de la puesta a prueba, identificar fortalezas y áreas de mejora de la secuencia, y reflexionar sobre sus implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Este ciclo se repetiría a lo largo de un periodo lectivo, abordando diferentes temas y habilidades matemáticas relevantes para el currículum del CCH. Se espera que la experiencia de planear, probar y analizar conjuntamente estrategias didácticas ayude a los profesores a profundizar su conocimiento matemático para la enseñanza y a desarrollar prácticas más efectivas y centradas en el aprendizaje.

2.2 Estrategias para promover la reflexión

Para favorecer procesos reflexivos productivos en la comunidad, se proponen las siguientes estrategias:

- Usar protocolos estructurados de discusión que orienten el diálogo hacia la evidencia del aprendizaje de los alumnos y el análisis de la práctica docente.
- Apoyarse en artefactos de la práctica (planes de clase, videos, producciones de los estudiantes) para anclar la reflexión en situaciones concretas.
- Plantear preguntas abiertas que inviten a los profesores a explicitar su pensamiento, justificar sus decisiones y considerar perspectivas alternativas.
- Modelar y promover una actitud de indagación y autocrítica, en la que los errores se vean como oportunidades de aprendizaje.
- Propiciar la construcción de conexiones entre la experiencia vivida y los marcos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Asimismo, se buscaría que la reflexión trascienda el análisis puntual de las secuencias didácticas y abarque también aspectos más amplios de la identidad y el desarrollo profesional de los docentes. Para ello, se promoverán espacios de escritura reflexiva individual y de diálogo sobre temas como la visión de las matemáticas, las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje, los retos de la práctica y las metas de mejora.

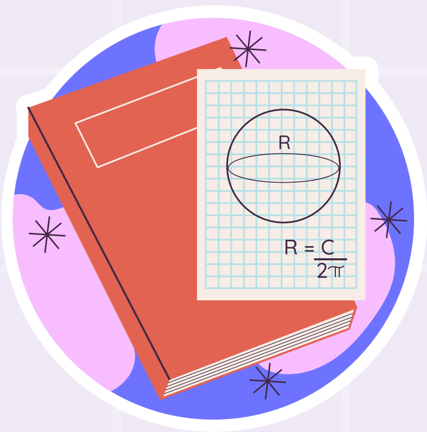
> Se buscaría que la reflexión trascienda el análisis puntual de las secuencias didácticas y abarque también aspectos más amplios de la identidad y el desarrollo profesional de los docentes.

3 Metodología de investigación

Para documentar y analizar el funcionamiento y los efectos de la comunidad profesional de aprendizaje, se proponen estudios cualitativos con un diseño de investigación-acción participativa. Este enfoque permitirá a los profesores asumir un rol activo en la generación de conocimiento sobre su propia práctica y desarrollo profesional, ayudando a que los profesores generen investigación académica.

El estudio se llevaría a cabo con una muestra intencional de 6-8 profesores de matemáticas del CCH-UNAM que participen voluntariamente en la comunidad durante un semestre. Se emplearán técnicas de recolección de datos como:

- Observación participante de las sesiones de la comunidad y de clases.
- Entrevistas semiestructuradas individuales y grupales con los profesores.
- Análisis documental de planeación, materiales didácticos y producciones de los alumnos.
- Diarios reflexivos de los participantes.



Estas comunidades ofrecen un espacio para la reflexión crítica, la colaboración entre pares y el aprendizaje significativo.

El análisis de los datos se realizará mediante un proceso inductivo de codificación temática, buscando identificar patrones y relaciones en las experiencias y percepciones de los profesores para mejorar su práctica docente.

4 Resultados esperados y discusión

Se espera que la participación en la CPA tenga un impacto positivo en los conocimientos y prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas del CCH-UNAM. En particular, se prevé que los docentes profundicen su comprensión de conceptos matemáticos clave y sus estrategias de enseñanza, especialmente en torno a la función cuadrática; desarrollen habilidades para diseñar y analizar tareas matemáticamente, que fomenten la resolución de problemas; fortalezcan su capacidad para observar y retroalimentar el pensamiento de los estudiantes; adopten una postura reflexiva y crítica sobre su propia práctica, buscando la mejora continua; valoren el aprendizaje colaborativo y el intercambio de experiencias con colegas como medio de desarrollo profesional.

5 Conclusiones

Las comunidades profesionales de aprendizaje (CPA) son una estrategia prometedora para la formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas del CCH-UNAM. Estas comunidades ofrecen un espacio para la reflexión crítica, la colaboración entre pares y el aprendizaje significativo, lo que puede contribuir a superar las limitaciones de los modelos tradicionales de capacitación, mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y promover la innovación en la enseñanza.

La implementación de las CPA en el CCH-UNAM requiere del compromiso de la dirección del Colegio, la participación de los profesores y la disponibilidad de tiempo y recursos. Se recomienda realizar un estudio piloto, desarrollar un programa de formación para los profesores y crear una plataforma *online* para facilitar la comunicación y el intercambio de recursos.

En definitiva, las CPA pueden ser una herramienta valiosa para mejorar la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas del CCH-UNAM, lo que a su vez puede contribuir a mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

6 Bibliografía

Chauraya, M., & Brodie, K. (2017). Learning in Professional Learning Communities: Shifts in Mathematics Teachers' Practices. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(3), 223-233. https://doi.org/10.1080/0035919X.2017.1350531

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Paidós.

Dogan, S., Pringle, R., & Mesa, J. (2016). The impacts of professional learning communities on science teachers' knowledge, practice and student learning: A review. *Professional Development in Education*, *42*(4), 569-588. https://doi.org/10.1080/19415257.2015.1065899

Huerta-Vázquez, M. Á., Figueras, O., & Martínez Pérez Sandra Areli. (2022). Impacto de la Reflexión en los Conocimientos de Profesores Miembros de una Comunidad de Aprendizaje. En A. Lischka E., Dyer Elizabeth B., Jones Ryan Seth, J. N. Lovett, J. Strayer, & S. Drown (Eds.), *Proceedings of the 44th Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group for The Psychology Of Mathematics Education* (pp. 643-652). Middle Tennessee State University.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How profesionals think in action*. Basic Books.

Sosa, L., & Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: Una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, *1*(1). http://pag.org.mx/index.php/PAG/article/view/48

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. En *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (Vol. 1, pp. 157-223). Information Age Publishing.

UNAM. (2019). *Formación docente en la UNAM: Antecedentes y la voz de su profesorado* (A. M. del P. Sánchez Mendiola, Melchor; Martínez Hernández, Ed.).

Exploración de las nociones sobre frecuencia relativa en estudiantes de bachillerato

Por:
Profa. Sandra Areli Martínez Pérez | Azcapotzalco
sandraareli.martinez@cch.unam.mx
Prof. Miguel Ángel Huerta Vázquez | Azcapotzalco
miguelangel.huertav@cch.unam.mx

RESUMEN

El presente estudio es una exploración para responder la pregunta ¿cómo entienden el concepto de frecuencia relativa los estudiantes de bachillerato? Se analiza la pregunta de un cuestionario aplicado a 22 estudiantes de bachillerato (17-18 años) que habían llevado un curso de probabilidad. Las respuestas se categorizaron para determinar los patrones presentes que permitan ofrecer características de sus conocimientos. Los resultados del análisis revelan que los estudiantes tienen un concepto espontáneo de la frecuencia relativa, sin alcanzar el concepto científico correspondiente. Se analizan las causas de este resultado.

Palabras clave: nociones, frecuencia relativa.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad es importante en la ciencia, en la tecnología y en la vida diaria, por lo que se ha ganado un lugar en el currículo de matemáticas de todos los niveles escolares. Aunque se introducen algunos temas de probabilidad en el nivel básico y en el medio básico, es en el bachillerato donde los estudiantes se enfrentan al problema de adquirir un conocimiento más sistemático del tema. Uno de los objetivos de la enseñanza de la probabilidad en los niveles básicos es que los estudiantes distingan entre fenómenos determinísticos y fenómenos aleatorios. Como los fenómenos aleatorios abarcan una cantidad inmanejable de fenómenos, los diferentes enfoques de la probabilidad (clásico, frecuencial, subjetivo) delimitan subclases de ellos (Gillies, 2000). El enfoque clásico abarca sólo los fenómenos cuyo espacio muestral es equiprobable y su enseñanza se prescribe en el nivel medio básico. En cambio, el enfoque frecuencial cubre una clase más amplia de fenómenos aleatorios y da lugar al concepto de *frecuencia relativa*; dicho enfoque suele ser tratado en el bachillerato. El enfoque subjetivo abarca una clase aún más grande de fenómenos, pero no se recomienda en los planes de estudio del bachillerato. Como el concepto de frecuencia relativa está ligado al enfoque frecuencial de probabilidad, y es propio del nivel bachillerato, nos preguntamos: ¿Cómo entienden el concepto de frecuencia relativa los estudiantes de este nivel? ¿Logran retener las propiedades de la frecuencia relativa? Como un avance en las respuestas a estas preguntas, en el presente estudio presentamos una parte de los resultados de un experimento de diseño (Martínez-Pérez, 2022) cuyo objetivo fue explorar el razonamiento de los estudiantes durante actividades de resolución de problemas sobre el enfoque frecuencial de probabilidad.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los cursos introductorios de bachillerato los temas de probabilidad y estadística se estudian de manera separada; sin embargo, en los análisis estadísticos se debe poner en juego el razonamiento probabilístico pues este permite manejar situaciones de incertidumbre y variabilidad intrínsecas de los fenómenos que estudia la estadística. Una forma de involucrar la incertidumbre y la variabilidad en las clases de probabilidad es organizando situaciones y planteando problemas en los que se generen datos que sigan una distribución desconocida, y los estudiantes tengan que analizarlos para obtener conclusiones, por ejemplo, estimar probabilidades de eventos.

El concepto de probabilidad, desde un enfoque frecuencial, se construye directamente sobre las nociones de experiencia aleatoria, evento y frecuencia relativa de un evento.

Por lo anterior, consideramos que se debe investigar cómo pueden razonar los estudiantes cuando enfrentan problemas que vinculen probabilidad con estadística y que el enfoque frecuencial debe ser bien estudiado.

El concepto de probabilidad, desde un enfoque frecuencial, se construye directamente sobre las nociones de experiencia aleatoria, evento y frecuencia relativa de un evento (Batanero, *et al*., 2005). El razonamiento acerca del enfoque frecuencial contrasta con el de probabilidad clásica y ninguno de ellos se realiza por completo si no se entiende adecuadamente su relación. Finalmente, se suele juzgar a la probabilidad frecuencial como empírica o experimental, en contraste con el acercamiento teórico (clásico) y se sugiere que la probabilidad frecuencial es más cercana a la realidad (Ireland y Watson, 2009).

En esta problemática se inscribe el presente trabajo, es decir, se propone explorar cuáles son las nociones del concepto frecuencia relativa que tienen los estudiantes de bachillerato con el propósito de formular objetivos e hipótesis de aprendizaje.

ANTECEDENTES

Serrano *et. al*. (1996) realizaron un estudio sobre la interpretación que hacen 277 alumnos de bachillerato de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial. También se menciona que en Serrano (1993) y Serrano y Batanero (1994) se sugieren, como posibles fuentes de obstáculos al aprendizaje, la heurística de la representatividad (Kahneman *et al.,* 1982), el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y la interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial. Concluyen que un grupo importante de alumnos que manifiestan dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad proporcionan a los profesores información sobre posibles dificultades en la interpretación de estos enunciados, extendiendo los resultados de las investigaciones de Konold.

Por otro lado, en Sánchez y Valdez (2014) se destacó la componente pre-

dicción / incertidumbre de las 'grandes ideas' de la probabilidad que propuso Gal (2005), componente que prefigura la ley de los grandes números (LGN). En particular, exploraron tareas similares al problema número 10 del presente estudio, en los que, debido a que el tamaño de la muestra es pequeño, la incertidumbre es alta. Aunque la versión matemática de la LGN es tema de cursos universitarios de probabilidad, con la ayuda de recursos tecnológicos se han vislumbrado trayectorias para incluir versiones empírico-virtuales de dicha ley en la enseñanza básica.

La investigación sobre las interpretaciones de probabilidad clásica y frecuencial proporciona un marco propicio para el estudio de las concepciones de los estudiantes acerca de las ideas clave en probabilidad (Jones *et al*. 2007).

La articulación de las interpretaciones de probabilidad es importante para un razonamiento probabilístico adecuado. Borovnick y Kapadia (2014) afirman que para construir conceptos sólidos de las intuiciones emergentes se requiere una combinación juiciosa de las tres interpretaciones de la probabilidad (clásica, frecuencial, subjetiva).

MARCO CONCEPTUAL

Dado que en este estudio nos interesan las nociones sobre frecuencia relativa, tomaremos la siguiente definición: sea un evento en un espacio muestral, la frecuencia relativa de es la razón , siendo el número de resultados en los que ocurre el evento A, y el número total de resultados del experimento.

Vygotsky (1995) distingue los conceptos espontáneos de los conceptos científicos. Los primeros los adquiere el niño en el curso de sus experiencias en la vida diaria, sin mediar una instrucción sistemática; en cambio, los segundos son aquellos que proporciona la escuela, y su aprendizaje requiere de una disposición y voluntad deliberada por parte del aprendiz. Un estudiante que ha adquirido un concepto es consciente y tiene control de él. Es decir, puede verbalizarlo (describirlo o caracterizarlo) y verlo inmerso en un sistema más amplio de conceptos. Nuestra hipótesis es que los estudiantes conservan un concepto espontáneo de experiencia aleatoria, es decir, basado en el conocimiento de la vida diaria de fenómenos cuyos resultados no pueden predecirse; pero no han construido un lenguaje técnico para describir y caracterizar las experiencias aleatorias de manera científica.

MÉTODO

Participantes. Un grupo de 22 estudiantes de un bachillerato público de la Ciudad de México, eran de sexto semestre (17-18 años) y ya habían cursado Estadística y Probabilidad I, en este estudiaron los temas de estadística descriptiva y probabilidad.

Instrumento. Una pregunta de un cuestionario de ocho preguntas se analiza en este informe. Se siguió el formato del estudio de Dantal (1998) quien formula de manera directa: ¿Qué entiendes por…? Éste pregunta por los conceptos de "experiencia aleatoria, evento y probabilidad." Nosotros, en lugar de preguntar, ¿qué entiendes por evento?, preguntamos por la noción de frecuencia relativa. Este cambio obedece a que queremos centrarnos en los conocimientos que sobre el enfoque frecuencial de probabilidad puedan expresar los estudiantes. La aplicación del cuestionario se realizó en el contexto de un experimento de diseño en el que los estudiantes resolvieron un problema no rutinario de probabilidad (Martínez-Pérez y Sánchez, 2022).

No se esperaba que respondieran con la definición precisa, pues tenemos la hipótesis de que un curso como el que llevaron no aseguraría que los estudiantes se apropiaran de tales conceptos a partir de su definición. Más bien esperamos que los estudiantes acomodasen estos nuevos términos a sus nociones del sentido común, ya sea como resultado de su curso previo, o de manera espontánea durante el proceso de resolución de la tarea. Las preguntas dan la oportunidad de que las respuestas ofrezcan indicios del enfoque frecuencial de probabilidad. Así, respuestas avanzadas a las tres preguntas podrían incluir rasgos de este enfoque; por ejemplo, se podría mencionar que la frecuencia relativa consiste en el número de veces que ocurre un evento entre el número de veces que se repite la experiencia.

Procedimiento de análisis. Las respuestas a la pregunta se codificaron y categorizaron como se recomienda en los primeros pasos de estudios de *Teoría Fundamentada* (Birks y Mills, 2015), pero cabe aclarar que no se propone una teoría como lo recomienda el método de dicha teoría, además de que solo se están explorando las nociones que tienen los estudiantes.

Inicialmente buscamos palabras o ideas que fueran comunes y se colocaron en códigos, este proceso de agrupación de respuestas se plantea en la *Teoría Fundamentada* propuesta por Birks y Mills (2015).

RESULTADOS

Ocho estudiantes (36 %) se acercan a la definición de frecuencia relativa (por

Las situaciones de juegos de azar, con muy pocas exigencias conceptuales, permiten plantear problemas significativos para los estudiantes y definir, calcular e interpretar probabilidades.

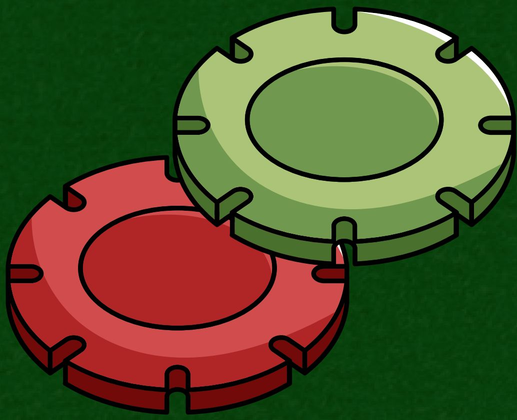
ejemplo, en la respuesta de E1 a continuación), ya sea como el cociente de la “frecuencia absoluta entre el número de datos”, o como “porcentaje de la frecuencia absoluta.” Dado a que se refiere al cociente de una frecuencia relativa como “número de datos”, no es claro si diferencian entre la probabilidad clásica y la frecuencia relativa. Es decir, es posible que algunos de ellos se refieran con “frecuencia absoluta” a los “casos favorables” de un suceso que seguramente escucharon cuando llevaron el curso de probabilidad y estadística. De las respuestas restantes, en tres (14 %) se responde que la frecuencia absoluta (ver la respuesta de E7) es “la frecuencia del suceso”, y en dos (9 %) reconocen que es un cociente de la frecuencia absoluta, pero sin mencionar el denominador (E17). En tres casos no se responde y las seis respuestas restantes (27 %) ofrecen ideas erróneas al concepto (como E13). Nuevamente, un rasgo relevante es que, excepto por la respuesta de E13, ninguna respuesta alude a la repetibilidad de las experiencias.

> Es el resultado que se da entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos (E1).
>
> Es el número de veces que puede ocurrir un evento (E7).
>
> Cociente de la frecuencia absoluta (E17).
>
> Una serie de hechos que se repiten constantemente (E13).

CONCLUSIONES

Los resultados confirman la hipótesis de que los estudiantes tienen un concepto espontáneo de frecuencia relativa. La instrucción que recibieron no fue adecuadamente orientada para que lograran crear un lenguaje técnico para referirse a la frecuencia relativa, ubicándola en un sistema de conceptos.

El uso didáctico de los juegos de azar como un contexto paradigmático para plantear problemas de probabilidad tiene un doble efecto. Por un lado, las situaciones de juegos de azar, con muy pocas exigencias conceptuales, permiten plantear problemas significativos para los estudiantes y definir, calcular e interpretar



probabilidades. En efecto, los conceptos de espacio, muestra, casos favorables y posibles a un evento y probabilidad clásica, e incluso probabilidad frecuencial, son entendibles para los estudiantes utilizando situaciones de monedas, dados y urnas. Esto permite que los estudiantes se formen un concepto espontáneo de una experiencia aleatoria; espontáneo porque lo utilizan en la práctica, pero no son capaces de distinguirlo como un concepto científico, es decir, de verbalizarlo e insertarlo en un sistema de conceptos. Las situaciones de juegos de azar ocultan las propiedades de una experiencia aleatoria, debido a la familiaridad de los estudiantes con los objetos aleatorizadores (monedas, dados y urnas) y a la facilidad de manipularlos; de esta manera propician más la acción que a la reflexión.

El éxito que se alcanza al utilizar didácticamente los juegos de azar, al lograr que los estudiantes utilicen diagramas de árbol u otros recursos y calculen probabilidades utilizando el enfoque clásico, se vuelve impotente frente a situaciones contextualizadas en las que antes de hacer cálculos es necesario modelar la situación (Pfannkuch y Ziedins, 2014). En consecuencia, es necesario que la enseñanza no se reduzca a situaciones de azar, sino que se amplíe el universo de situaciones a aquellas que exigen un trabajo de modelación, pero para lograrlo los estudiantes deben alcanzar un concepto científico de experiencia aleatoria y superar su concepto espontáneo de ella.

Una limitante para este trabajo es que quizá se cuestionó a los estudiantes sobre el concepto y no se pidió que dieran algún ejemplo para constatar que realmente tienen o no la noción de frecuencia relativa.

REFERENCIAS:

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (eds.), *Exploring probability in school. challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Birks, M., y Mills, J. (2015). *Grounded theory. A practical guide.* SAGE.

Dantal, B. (1998). Comment les élèves de terminale perçoivent les concepts d'expérience aléatoire, d'événement et de probabilité. En Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (eds.), *Enseigner les probabilités au lycée. Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités* (pp. 67-69). IREM.

Borovcnik, M., y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.

GILLIES, D. (2000). *Philosophical Theories of Probability*. New Fetter Lane, London: Routledge.

IRELAND, S., y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 339-370.

JONES, G. A., Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2007). Research in Probability. Responding to classroom realities. En F. K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (909-955). Information Age Publishing y National Council of Teachers of Mathematics.

KAHNEMAN, D., y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition, 11*, 143-157.

LECOUTRE, M. (1992). Cognitive Models and Problems Spaces in "Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics 23* 557-568.

MARTÍNEZ-Pérez, S. A. (2022). *Exploración de nociones básicas relacionadas con los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad de estudiantes de bachillerato*. [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional].

MARTÍNEZ-Pérez, S. A. y Sánchez, E. (2022). High school students' reasoning on the frequency approach of probability when facing a non-routine problem. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(3), 631-644.

PFANNKUCH, M. y Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. En E. J. Chernoff, y B. Sriraman (eds.). *Probabilistic thinking. Presenting plural perspective* (pp. 101-116). Springer.

SÁNCHEZ, E., y Valdez, J. (2014). Reasoning development of a high school student about probability concept. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.

SERRANO, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: un estudio de concepciones iniciales*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

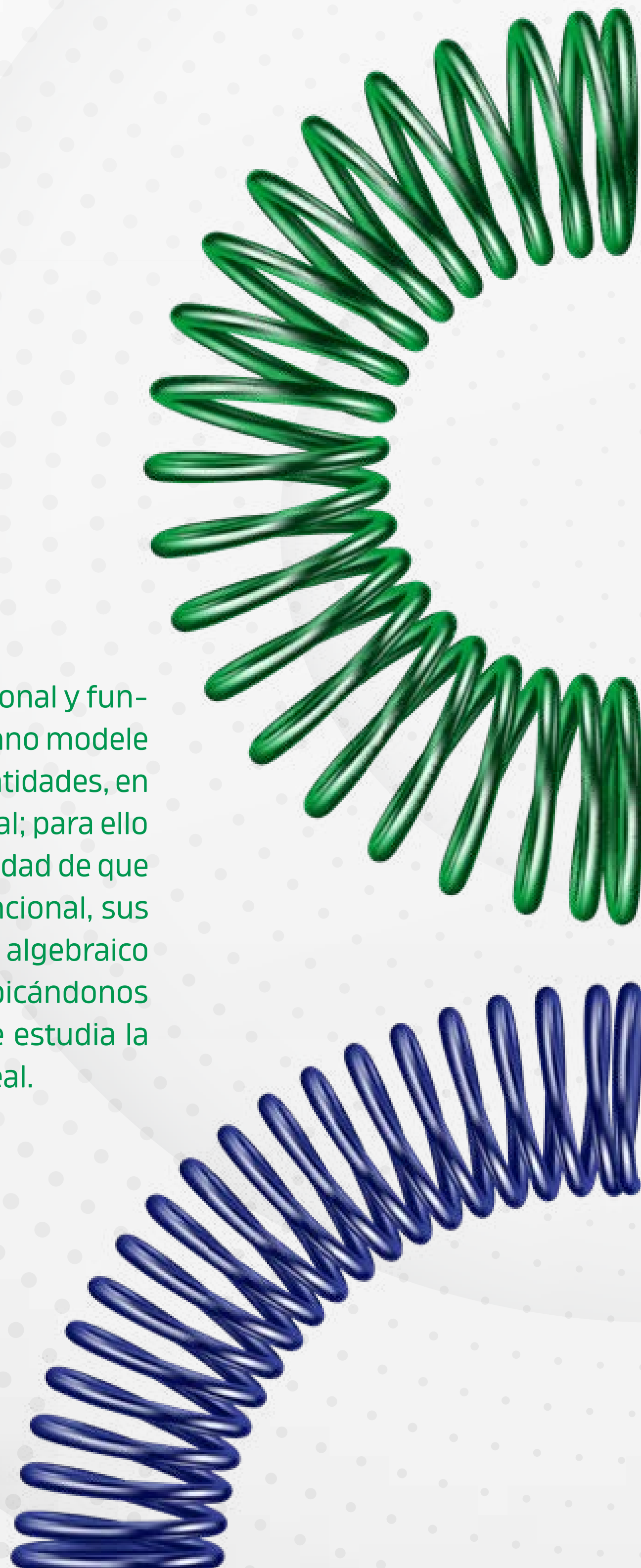
SERRANO, L., & Batanero, C. (1994). Concepciones sobre la convergencia estocástica y heurística de representatividad en una situación de simulación. *Actas de las V Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, Universidad de Badajoz, 571-574.

SERRANO, L., Batanero, C., & Ortiz, J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. Suma, 22, 43-50. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/22/043-049.pdf

VYGOTSKY, L. (1995/1934). *Pensamiento y lenguaje*. Paidós.

Matemáticas experimentales: La función lineal en la elasticidad de los resortes

Por:
América Ariana Salazar Nájera
america.salazar@cch.unam.mx
Román Trejo Jardón
roman.trejo@cch.unam.mx



Resumen

El propósito de la Unidad II (Variación directamente proporcional y funciones lineales) de Matemáticas I, en el Colegio, es que el alumno modele y analice situaciones que involucren la variación entre dos cantidades, en los casos en que la razón de sus incrementos sea proporcional; para ello utilizará los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad (DGCCH 2016). Ubicándonos en este contexto, compartimos una secuencia en la que se estudia la elongación de un resorte como ejemplo de una función lineal.

Palabras Clave: Elongación, Función lineal

En el Colegio de Ciencias y Humanidades la enseñanza de las matemáticas está orientada hacia la formación de estructuras de pensamiento que permitan al alumno comprender, manejar diferentes recursos para resolver problemas, utilizar e incluso construir relaciones de cantidad y de formas espaciales, así como percibir la necesidad de argumentar sus afirmaciones. Por lo cual la matemática brindará al alumno una formación básica que incluye el desarrollo de habilidades y secuencias para que pueda obtener y apropiarse por sí mismo de nuevos conocimientos (CCH, 2006, pág. 18).

Con base en lo anterior, y para dar oportunidad a los alumnos de que puedan realizar conjeturas, reflexiones, generalizar y construir conocimientos significativos en matemáticas y así elevar la calidad del aprendizaje al mismo tiempo que fortalecer el quehacer pedagógico en el aula, nosotros creamos, diseñamos, aplicamos y rediseñamos secuencias didácticas; sin embargo, este trabajo no está completo sin la adecuada difusión, por lo que en este escrito compartimos una secuencia didáctica que consiste en la elongación de un resorte; creemos que esta secuencia es importante para enfocar actividades propias de las matemáticas, al modelar fenómenos del mundo real; ésta permite a los alumnos adquirir y cimentar sus conocimientos, ya que les ayuda a incrementar habilidades necesarias para su desarrollo personal, ofreciendo de esta manera una formación integral básica.

En matemáticas, la resolución de problemas como secuencia fundamental del aprendizaje permite revisar los contenidos a través de problemas de diversa índole, dando contextos de aplicación y referentes que facilitan la comprensión de estos.

Se sugiere la aplicación de esta secuencia al concluir el tema de Variación directamente proporcional y después de ver el concepto de Función lineal, para reafirmar y visualizar conocimientos teóricos vistos en clase o al inicio de este tema para propiciar preguntas generadoras de conocimiento.

PROPÓSITO

Proporcionar una secuencia didáctica multidisciplinaria incorporando las ciencias experimentales, para apoyar a que los alumnos logren los aprendizajes propuestos.

DESARROLLO

A continuación presentamos la secuencia didáctica enriquecida con lo observado en las aplicaciones.

I. PROGRAMA

Unidad temática: Unidad 2. Variación directamente proporcional y funciones lineales.

Propósito(s) de la unidad: Al finalizar la unidad, el alumno modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sea proporcional; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Aprendizaje(s): El alumno

1. Modela con la expresión $y=mx+b$, una variación relacionada entre dos variables con rapidez de variación constante y condición inicial $(0, b)$

2. Dada una variación que se modela con una función lineal, el alumno calcula estados específicos de la variación, su rapidez de cambio y estado inicial, empleando sus representaciones gráfica y analítica.

Tema(s): Representación analítica de una función lineal.

Análisis algebraico y gráfico de una función lineal

- Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas:
- Condición inicial.
- Rapidez de variación.

II. SECUENCIA

Tiempo didáctico: Una sesión de dos horas.

Organización: Trabajo individual y por equipos.

Desarrollo y actividades:

Fase de apertura

El profesor da una breve explicación de la actividad y establece los parámetros que se deben incluir en la elaboración del reporte experimental final (reporte tipo artículo); posteriormente proporciona la rúbrica de evaluación a los alumnos para que consideren los aspectos a evaluar.

Los alumnos forman de 4 a 6 grupos de trabajo, utilizando la técnica de rejilla.

Materiales:

Alumnos (proporcionado por el laboratorio del Área de experimentales):

- Soporte universal.
- Resorte de 15 cm de longitud.
- Masas de 50 g. y 100 g.
- Flexómetro..

Profesor:

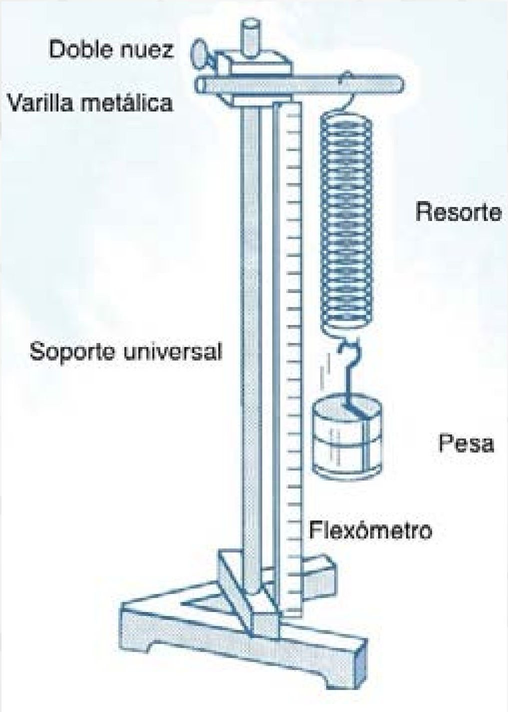
- Proyector.

Fase de desarrollo:

- Los alumnos toman fotografías del proceso experimental (opcional).
- En un soporte universal se instala una varilla metálica por medio de una nuez, en la cual se suspende un resorte en su extremo libre como se muestra en la figura de la derecha.

Proceso de medición:

- Con el flexómetro se mide la longitud inicial del resorte con una masa suspendida de 50 g.



- Posteriormente, se suspende del resorte otra masa de 50 g, bajo este arreglo se mide nuevamente su longitud, ahora con la masa suspendida obteniendo una longitud final l_f, de esta manera la deformación estará dada por $(l_f - l_o)$.
- El proceso de medición de las deformaciones debido al aumento de masa (cada 50 g) se repite hasta llegar a 1 Kg (eso es recomendable para obtener una muestra significativa), posteriormente los alumnos llenan la siguiente tabla:

Longitud $(l_f - l_o)$	Masa (g)
	50
	100
	150
	200
	250
	300
	350
	...
	1000

- Los alumnos realizan una gráfica en papel milimétrico, identificando el modelo matemático del experimento.

Nota: Las funciones que se esperan son una aproximación al comportamiento del fenómeno, debido al margen de error en las mediciones y al procedimiento que realizan los alumnos para obtenerlo, en cuyo caso (de ser necesario) el profesor los orientará a plantear el modelo matemático.

Fase de cierre:

Profesor:

- Instala el proyector y la computadora con la hoja de cálculo.
- Con los datos medidos se realiza una gráfica de deformación *vs* masa (la construcción de la gráfica deberá proyectarse con la finalidad de que los alumnos aprecien el comportamiento del fenómeno).
- En Excel por el método de "mínimos cuadrados" se calcula la línea de tendencia (Modelo matemático).
- Los alumnos deben realizar el reporte del experimento conforme a lo señalado.

Comentarios adicionales: A criterio del profesor se le puede dar una breve introducción del uso de Excel para ajustar líneas de tendencia.
Evaluación:

Rúbrica para evaluar el trabajo experimental "Función lineal"			
Rubros	2 puntos	1 punto	0 puntos
Presentación del trabajo	El equipo entrega el reporte con los parámetros establecidos en clase	El equipo entrega el reporte con parámetros incompletos	El equipo no presenta el reporte o presenta un reporte en hojas de cuaderno
Introducción	La teoría está encaminada a la explicación del fenómeno, dando pie a la reflexión y a la solución de preguntas generadoras	Relaciona un poco la teoría con la actividad experimental realizada	Carece de introducción
Descripción de la parte experimental	Cada etapa del experimento se describe detalladamente, mostrando imágenes con su respectivo pie de imagen	Cada etapa del experimento se describe de manera superficial	El reporte carece de la fase de desarrollo
Participación en la actividad experimental (esta sección debe evaluarse con los criterios que los alumnos aporten).	El alumno participa en el desarrollo de la actividad, involucrándose totalmente en el desarrollo de la misma	La participación del alumno se limita a ser espectador y tiene actitudes de simulación	El alumno no es partícipe del experimento
Participación en la elaboración escrita del reporte (esta sección debe evaluarse con los criterios que los alumnos aporten).	El alumno participa íntegramente en la elaboración del reporte escrito	El alumno tiene participación parcial en la elaboración del reporte	El alumno no tiene participación alguna en la elaboración del reporte

Lista de cotejo para evaluar el cálculo teórico-experimental del reporte			
Indicadores	**Sí (2 puntos)**	**Parcialmente (1 punto)**	**No (0 puntos)**
Comprende la situación física del problema			
Es capaz de relacionar la situación física del problema con un modelo matemático			
Hace dibujos de la situación física			
Sobre los dibujos, es capaz de identificar las fuerzas que actúan en el sistema físico			
Interpreta físicamente el resultado matemático			

RESULTADOS GENERALES

La secuencia se aplicó en los grupos al concluir el tema de *Variación directamente proporcional* y después de ver el concepto de función lineal para reafirmar y visualizar conocimientos teóricos vistos en clase; esto permitió revisar los contenidos, dando un contexto de aplicación y referentes que facilitan la comprensión de los aprendizajes propuestos en las unidades del curso.

Así mismo, después de la secuencia se proporcionó una sesión más, para aclarar que la idea abstracta de la matemática es precisa en teoría, sin embargo, en la naturaleza no se puede hablar de exactitud, sino de buenas aproximaciones que se ajusten al fenómeno estudiado; dar este planteamiento a los alumnos deja una enseñanza significativa y multidisciplinaria con ciencias como la Física.

Los aprendizajes logrados en esta activad fueron:

- Modela con la expresión $y = mx + b$, una variación relacionada entre dos variables, transitando en la etapa de exploración, por representaciones tabulares y gráficas.

Es importante resaltar la riqueza de secuencias como ésta, que permite al alumno establecer relaciones entre cantidades desconocidas y modelar fenómenos del mundo real.

Como ya se mencionó anteriormente, la secuencia se evaluó con una rúbrica, los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Resalta que se tiene el 100% de la participación de los alumnos en la actividad experimental, esto destaca que a los alumnos les motiva realizar experimentos en donde apliquen, reafirmen y rectifiquen el modelo matemático y de esta manera se propicien los conocimientos significativos, por lo que consideramos necesario reemplazar el "aula teórica" de clases por un "taller de matemáticas".

Por otra parte, se tiene gran participación en la elaboración del reporte escrito y en su mayoría comprenden la situación física del problema, y lo representan tanto en tablas como en gráficas; se muestra que al alrededor del 61% de los alumnos son capaces de relacionar la situación física con el modelo matemático, 34% sólo lo hace parcialmente y un 5% no es capaz de relacionarlos.

Además, sólo un equipo de 5 alumnos no incorporó una introducción en su trabajo, 2 alumnos no participaron para la elaboración del reporte con su equipo y 3 no pueden interpretar el resultado.

El promedio de las calificaciones es de 8, aproximadamente 16 puntos de veinte y la calificación más alta es de 9 (18 de 20 puntos) y la más baja es de cuatro (un alumno).

Es importante resaltar la riqueza de secuencias como ésta, que permite al alumno establecer relaciones entre cantidades desconocidas y modelar fenómenos del mundo real, incluye aprendizajes conceptuales, procedimentales, aptitudinales (tales como la capacidad de iniciativa, de resolver problemas, trabajo en equipo y creatividad), actitudinales (ser sociable, dinámico, comprometido, cooperativo, etc.) entre otros.

CONCLUSIONES

Dentro de la enseñanza del álgebra es común encontrarse con dificultades en la asimilación de los conceptos y desarrollo de algoritmos, principalmente por la negativa de los alumnos al abordar tales labores complejas; una de las excusas que prevalecen es la nula aplicación inmediata de estos conocimientos en actividades prácticas; sin embargo, en las ciencias teóricas y experimentales como Física, Biología y Química, es habitual encontrar aplicaciones de estos temas de matemáticas en los estudios más rigurosos y formales, razón por la cual es conveniente hacer experimentos que muestren las aplicaciones de esta ciencia y de esta manera los alumnos observen su importancia en la validez de los resultados que presentan las mismas, dando a la matemática el lugar principal que se merece y no el papel discreto, complejo y aburrido que suele asignársele; es necesario hacer de la matemática una ciencia aplicable e incluso experimental en la docencia, así como reemplazar el aula teórica por un taller activo de Matemáticas.

Esta forma de trabajo favorece la multidisciplinariedad, además de incorporar habilidades, valores y actitudes como son el trabajo en equipo, pensamiento crítico, buena comunicación oral y escrita, capacidad de identificar y resolver problemas, responsabilidad y actitud emprendedora, entre otras.

REFERENCIAS

ALLEN, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Pearson.

DGCCH (2016). Programas de estudio, Área de Matemáticas, Matemáticas I-IV. https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf.

GARCÍA, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios*. México: Esfinge.

MILLER, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones* (12ª. ed.). México: Pearson. Addison Wesley.

NCTM, (1970). Colección: *Temas de Matemáticas. Medida*. Número 15. México: Editorial Trillas.

POLYA, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (1ª ed., 9ª reimpresión). México: Trillas.

Estudio experimental de la variación directamente proporcional con resistores conectados en serie

Por:
Cruz Lemas Francisco Alfonso (Área de Matemáticas) | Oriente
Yuri Posadas Velázquez (Área de Ciencias Experimentales) | Oriente
Juan Solís Flores (Área de Ciencias Experimentales) | Oriente

RESUMEN
En este trabajo se presenta una propuesta experimental para estudiar la variación directamente proporcional mediante un arreglo de resistores conectados en serie; concretamente, midiendo con un óhmetro o multímetro el valor de la resistencia eléctrica en función del número de resistores conectados . Se presentan los datos obtenidos por un equipo de alumnos. Se emplearon 10 resistores del mismo valor. El coeficiente de correlación entre y es y el valor calculado para (la pendiente de la recta) sólo difiere 0.4% con respecto al valor nominal de los resistores utilizados.
Palabras clave: resistor, serie, proporcionalidad directa, variables, modelación y resistencia eléctrica.

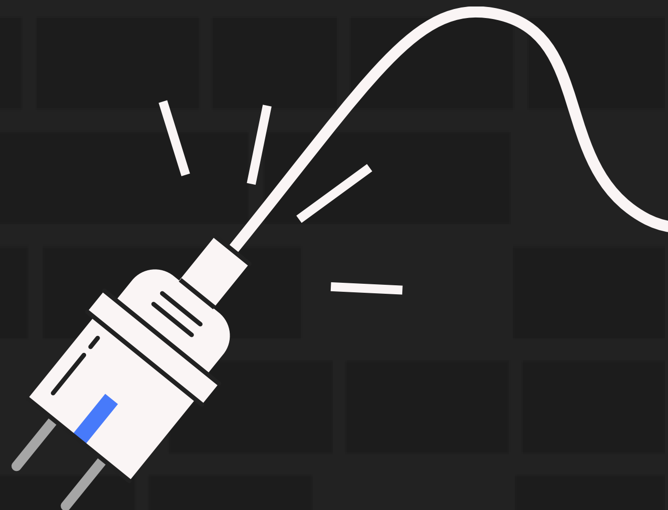
INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos tienen una utilidad capital no sólo en las matemáticas y las ciencias experimentales como la física, sino también en disciplinas como la ingeniería, la cibernética, la medicina y muchas otras. Gran parte del avance científico y tecnológico de los siglos XX y XXI se deben a las diferentes técnicas proporcionadas por las matemáticas.

Para Blomhøj (2004: 21), un modelo matemático es una relación entre objetos matemáticos, por una parte, y por otra un fenómeno de naturaleza no matemática. En este sentido, es vital vincular las matemáticas con situaciones o realidades de otras disciplinas. Principalmente, en el caso del proceso de enseñanza-aprendizaje, para que el alumno relacione el pensamiento abstracto de las matemáticas con las situaciones concretas que presenta un fewznómeno físico o un problema relacionado con su cotidianeidad.

Blomhøj (2004: 26-28) propone la modelización de una relación de proporcionalidad directa –a través de relacionar el flujo de agua en función del tiempo– para sentar las bases cognitivas para el aprendizaje del concepto función y de las distintas representaciones relacionadas con la recta obtenida en un gráfico.

Por otra parte, Macías y Romo (2014: 463) identifican cuatro fases para diseñar actividades didácticas basadas en la modelación matemática: la elección del contexto extra-matemático, la naturaleza de la actividad, la elección y descripción del modelo matemático en uso, y la descripción de los conocimientos y técnicas necesarias para resolver la actividad.



La propuesta que se presenta para el estudio de la variación directamente proporcional parte de un fenómeno físico: en un arreglo de resistores conectados en serie, el valor de la resistencia total o equivalente () es igual a la suma de las resistencias eléctricas de los resistores que forman el arreglo:

$$R_e = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \qquad (1)$$

Una demostración de este principio puede verse, por ejemplo, en Young y Freedam (2014: 205-206) o Wlson y Buffa (2020: 602-603).

La demostración experimental de la ecuación (1) se encuentra en Gutiérrez, García y Mata (2019: 99-107) o en Hidalgo y Medina (2009: 209-211).

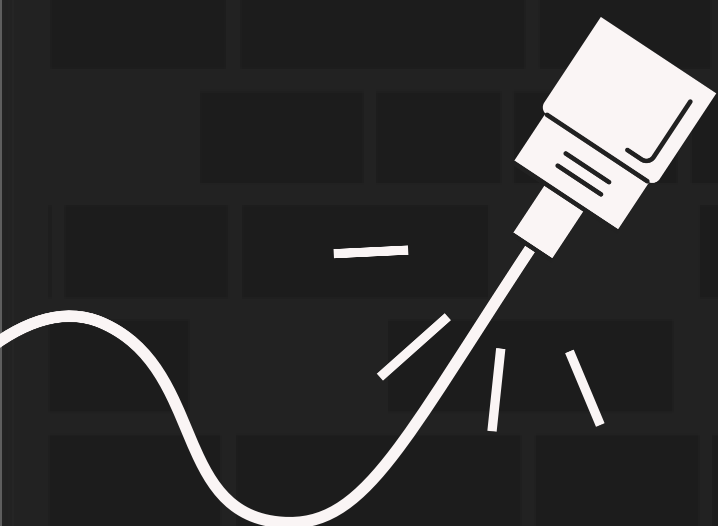
Consideramos, con Blomhøj, que una actividad basada en la experimentación facilita la adquisición de las bases cognitivas para entender los conceptos relacionados con la variación de proporcionalidad directa.

Además, siguiendo a Macías y Romo, la propuesta que realizamos sirve como una actividad didáctica, ya que se cumple con un contexto extra-matemático (un fenómeno físico), la actividad tiene una naturaleza experimental, se ha elegido un fenómeno donde las variables guardan una relación lineal y se tienen ubicados los conocimientos y técnicas requeridos para llevar a cabo la actividad: representación gráfica y tabular, además de los conceptos de variación y proporción entre dos magnitudes.

Consideramos que la modelación de fenómenos físicos es una herramienta útil, tanto en la comprensión de los conceptos vinculados a las matemáticas, como en la comprensión de aquéllos.

PROPÓSITO

La propuesta experimental consiste en la medición de la resistencia eléctrica (R) para un arreglo de n resistores conectados en serie. La finalidad es que los alumnos observen el patrón aditivo en una variación directamente proporcional: al aumentar el número de resistores se incrementa el valor de la resistencia eléctrica (R). Además, pueden realizar una representación tabular y gráfica de los valores medidos.



Con los datos anteriores es factible obtener el modelo matemático entre las dos variables estudiadas: la resistencia eléctrica y el número de resistores.

TEMÁTICAS

La propuesta apoya las temáticas siguientes de la Segunda Unidad de la asignatura de Matemáticas I:

- Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.
- El patrón aditivo en una variación directamente proporcional.

APRENDIZAJE

La propuesta apoya el aprendizaje siguiente de la misma unidad y asignatura:

- Traduce en una tabla de valores algunos “estados” correspondientes a la descripción verbal de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes.

MATERIAL Y EQUIPO

En la figura 1 se muestra el material y equipo a utilizar:

- Un multímetro digital u óhmetro de 3 ½ dígitos con una precisión de ± 0.5 Ω, con sus respectivas puntas de conexión.
- Una tableta de experimentación electrónica (*protoboard*).
- Diez resistores con el mismo valor de resistencia eléctrica (se sugiere de 1 kΩ) de ¼ o ½ kilowatt y una tolerancia del 5 %.

PROCEDIMIENTO

1. Mover el cursor del multímetro u óhmetro en la escala adecuada para medir resistencia eléctrica (por ejemplo, en la escala de kiloohms).
2. Insertar un resistor en dos ranuras diferentes del *protoboard* (figura 2) y medir el valor de la resistencia eléctrica, colocando cada punta del multímetro u óhmetro en la respectiva terminal del resistor.
3. Conectar otro resistor en serie con el del punto anterior (figura 3) y medir el valor de la resistencia eléctrica. Conectar más resistores en serie hasta completar diez (figura 4). Con cada nueva adición de resistores, medir la resistencia eléctrica. Agrupar las mediciones en una tabla y graficar el valor de la resistencia eléctrica (R) *versus* el número de resistores (n).

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la tabla presentada a continuación se consignan las mediciones realizadas por los alumnos para el valor de la resistencia eléctrica en función del número de resistores colocados.

TABLA I. *Resistencia eléctrica* versus *número de resistores*

Número de resistores (n)	Resistencia eléctrica equivalente R_e (k Ω) ± 0.0005 kΩ
1	0.99
2	1.99
3	2.98
4	3.98
5	4.97
6	5.97
7	6.96
8	7.96
9	8.96
10	9.95

La gráfica resultante se muestra en la figura 5. Si se realiza el análisis de regresión lineal, el modelo matemático que relaciona la resistencia eléctrica y el número de resistores (n) es:

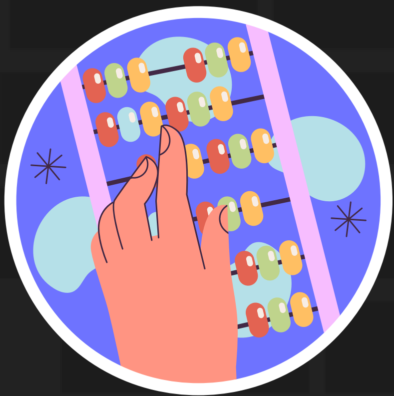
$$R_e = (0.995\ k\Omega)n - 0.0047\ k\Omega$$

Con un coeficiente de correlación de

$$\sigma^2 = 0.9999$$

Dado que se utilizaron resistores de 5% de tolerancia, el valor de la pendiente (0.995 $k\Omega$) se encuentra dentro del intervalo esperado: (0.950 $k\Omega$, 1.050 $k\Omega$). La ordenada al origen (0.0047 $k\Omega$) es pequeña y no representa más del 0.5 % con respecto al valor mínimo medido. Por lo tanto, la correlación entre R y n es excelente, por lo que la propuesta experimental es adecuada para demostrar la relación de proporcionalidad directa entre estas dos variables.

En la Tabla I también es posible observar "el patrón aditivo en una variación directamente proporcional" (*vid. supra* temática), porque el incremento de una unidad (un resistor más conectado en el arreglo) en n, implica el mismo aumento (sólo que en otra unidad de medida) en la variable R.



Una manera de propiciar la interdisciplina en el bachillerato universitario es buscar temáticas comunes entre las diferentes asignaturas.

Ahora bien, si se tabulan como en la Tabla II las diferencias entre los valores consecutivos de n y de R, se muestra que la proporción del incremento entre las variables $(^{\Delta R}/_{\Delta n})$, prácticamente se mantiene constante (entre 0.99 y 1 $k\Omega$).

TABLA II. ΔR *versus* Δn

Δn	ΔR (kΩ) ± 0.0005 kΩ
1	1.99 – 0.99 = 1.00
1	2.98 -1.99 = 0.99
1	3.98 – 2.98 = 1.00
1	4.97 – 3.98 = 0.99
1	5.97 – 4.97 = 1.00
1	6.96 – 5.97 = 0.99
1	7.96 – 6.96 = 1.00
1	8.96 – 7.96 = 1.00
1	9.95 – 8.96 = 1.00

Aquí conviene comentar con el alumno que los datos, al ser obtenidos por medio del multímetro, están sujetos a errores ambientales, humanos e instrumentales. Recordemos que el multímetro utilizado tiene una precisión de ± 0.5Ω , por lo que no es factible obtener, dentro de la experimentación, medidas "cien por ciento exactas y precisas".

Es importante subrayar el punto anterior, pues el alumno, al interaccionar con las ciencias experimentales, tiene la idea de que –como en las matemáticas– las cifras y los modelos matemáticos tienen que reflejar íntegramente la realidad de un fenómeno físico. Las matemáticas son una ciencia exacta, pero en las ciencias experimentales siempre se trabaja con aproximaciones, ya que la realidad es muy compleja y multifactorial.

CONCLUSIONES

Una manera de propiciar la interdisciplina en el bachillerato universitario es buscar temáticas comunes entre las diferentes asignaturas, en este caso, de matemáticas y de física. Esto enriquece el conocimiento de los alumnos y abre la posibilidad de vincular aprendizajes de dos materias. De esta manera, abre la posibilidad de que el alumno acceda al metaconocimiento e integre los conocimientos de, al menos, dos asignaturas. Así, entenderá que éstas no están aisladas de otras disciplinas y que existen temáticas afines que pueden abordarse desde diferentes perspectivas.

En nuestro caso, la propuesta experimental presentada es un recurso que es factible emplear para lograr la vinculación de la física y las matemáticas.

En cuanto a las temáticas y el aprendizaje para los cuales la propuesta está destinada, no sólo incentiva el razonamiento matemático, sino también ayuda a desarrollar la metodología experimental básica, aplicable tanto a la física como a las ciencias experimentales en general.

Además, coadyuva a entender la idea de un "patrón aditivo" o incremento en un fenómeno donde exista una relación de proporcionalidad directa. En el caso concreto abordado, a mayor número de resistores en serie conectados se incrementa el valor de la resistencia eléctrica del arreglo en la misma proporción.

Así, al registrar las medidas de la resistencia eléctrica en función del número de resistores conectados en serie, el alumno puede describir cómo es la variación directamente proporcional entre R y n Como la proporción del incremento entre las variables ($^{\Delta R}/_{\Delta n}$) es constante, el alumno tiene las bases para entender el concepto de pendiente y su significado dentro de la ecuación de la recta.

Finalmente, dado que el coeficiente de correlación entre las variables es alto ($\sigma^2 = 0.9999$) y el valor de la pendiente ($0.995\ k\Omega$) de la recta ajustada de la figura 5 se encuentra dentro del intervalo del valor de la resistencia eléctrica nominal empleada ($1k\Omega \pm 5\%$), nos indica que el experimento de esta propuesta es confiable para un estudio básico de la relación de proporcionalidad directa con base en un arreglo de resistores conectados en serie.

REFERENCIAS

BLOMHØJ, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B. CLARKE & *ET AL*. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159. Recuperado el 15 de agosto de 2023, de https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES (2016). Programas de Estudio. Área de Matemáticas: Matemáticas I-IV. Recuperado el 1 de agosto de 2023, de HTTPS://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf

GUTIÉRREZ, C. & GARCÍA, G. & MATA, R. (2019). *Experimentos de electricidad básica*. México: Mc Graw-Hill.

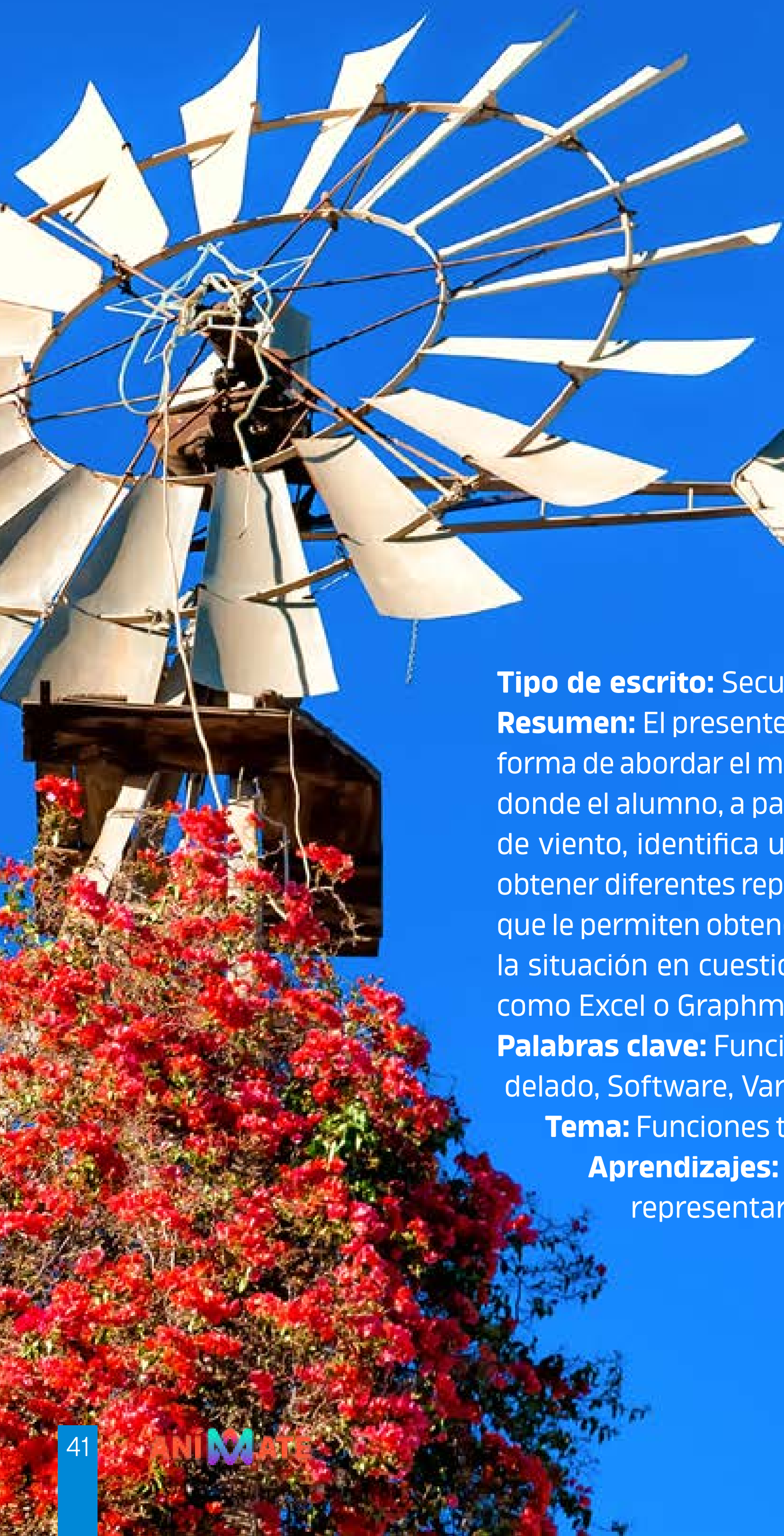
HIDALGO, M.A. & MEDINA, J. (2009). *Laboratorio de física*. México: Pearson-Prentice Hall.

MACÍAS, M.C. & ROMO, A. (2014). *Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 461-469). México, D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 12 de agosto de 2023, de http://funes.uniandes.edu.co/5449/1/MaciasMetodologiaALME2014.pdf

YOUNG, H. & FREEDMAN, R. (2014). Física para cursos con enfoque de competencias. México: Pearson.

WILSON, J. & BUFFA, A. (2020). *Física* (séptima edición). México: Pearson.

Modelando
funciones trigonométricas



Por:
Israel Gómez Flores
Israel.gomez@cch.unam.mx

Tipo de escrito: Secuencia didáctica

Resumen: El presente trabajo tiene la intención de mostrar una forma de abordar el modelado de las funciones trigonométricas, donde el alumno, a partir de la construcción física de un molino de viento, identifica un fenómeno de variación periódica para obtener diferentes representaciones (tabular, gráfico, algebraico) que le permiten obtener un modelo matemático que representa la situación en cuestión, haciendo uso de diferentes software, como Excel o Graphmatica.

Palabras clave: Funciones trigonométricas, Graphmatica, Modelado, Software, Variación periódica.

Tema: Funciones trigonométricas, problemas de aplicación.

Aprendizajes: Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

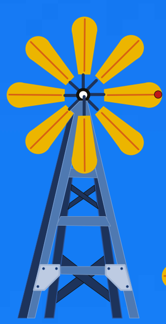
ACTIVIDADES

Fase inicial:

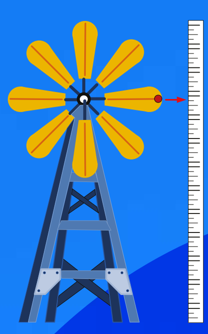
La actividad tiene como propósito que el alumno estudie fenómenos de variación periódica; para esto se construirá un molino de viento con ayuda de material reciclado, como cartón, palitos de madera, latas de aluminio, unicel, etc. Otros elementos requeridos: pegamento, diurex y regla. En equipos de 3 o 4 alumnos construyen un molino de viento, cuya altura de preferencia sea mayor a 30 cm. Se pueden guiar con las siguientes imágenes para tener una idea de cómo construirlo.

Fase de desarrollo:

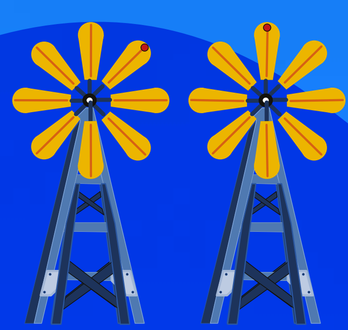
Modelo matemático. De acuerdo con el molino construido, los alumnos realizan lo siguiente:



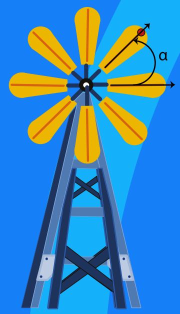
1.Seleccionan una de las hélices del molino (cualquiera) y colocan una marca en el centro.



2.Con ayuda de una regla miden la altura del punto con relación al suelo.



3. Realizan la medición de la altura para diferentes posiciones del punto (girando la hélice del molino) hasta completar una vuelta de la rueda (al menos 12 posiciones). Registran sus mediciones en una tabla.

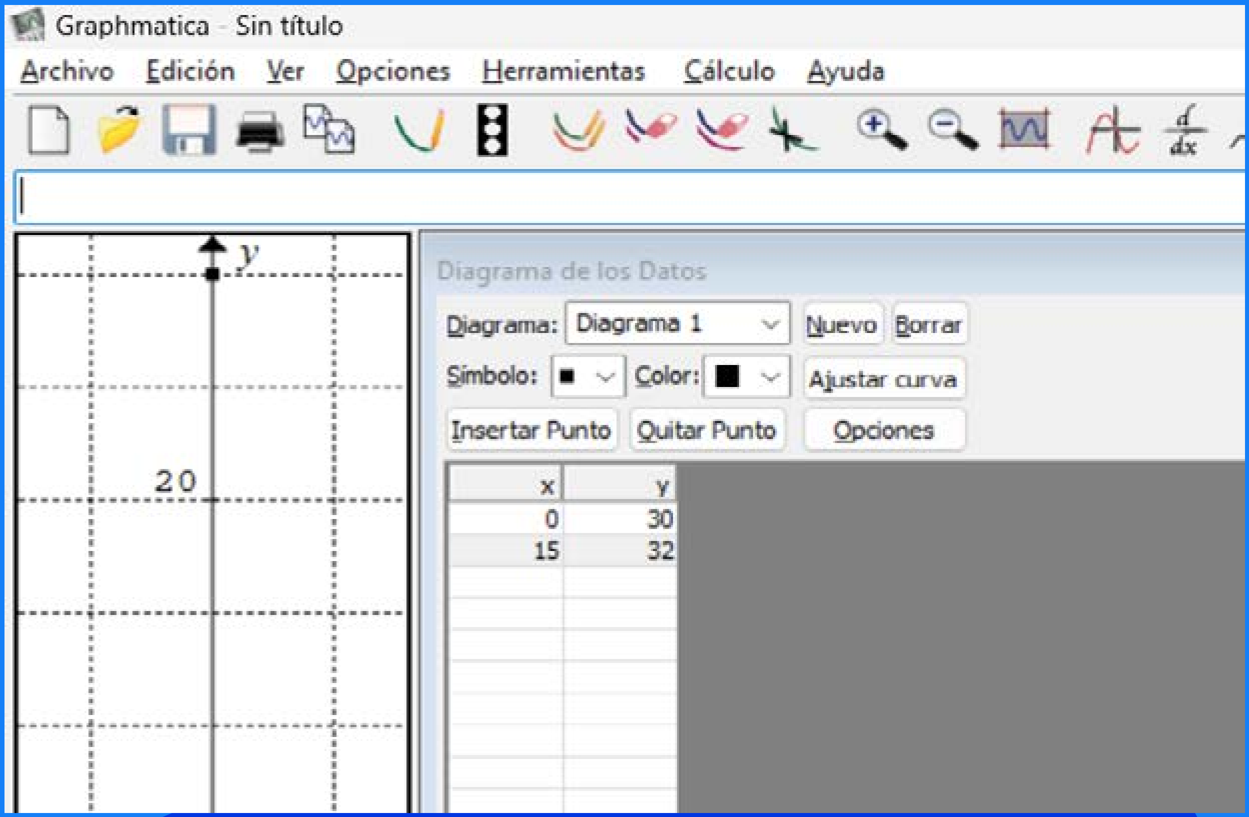


4. Los alumnos reflexionan en lo siguiente: Si se desea realizar una gráfica que represente la altura h, del punto marcado en el molino, ¿cuál sería la otra variable involucrada?, y ¿cómo la obtendrían? Para esto, con ayuda de su transportador miden el ángulo que forma la hélice marcada con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura siguiente:

5. En una tabla registran el ángulo y la altura.

α (grados)	altura *h* (cm)

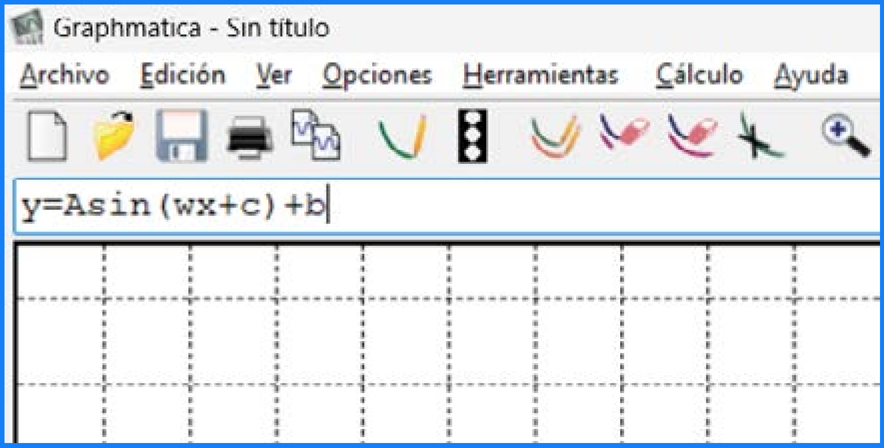
6. Realizan la gráfica de sus datos en una hoja milimétrica (ángulo *vs*. altura).
7. Identifican el tipo de función que pudieran representar los datos obtenidos.
8. Con ayuda de Graphmatica, en la opción ***diagrama de datos***, grafican los datos obtenidos.



9. Con la gráfica obtenida, identifican el periodo, amplitud, desplazamiento vertical y horizontal, que les permita obtener los valores relacionados con una función seno o coseno de la siguiente forma:

$$f(x) = Asen(wx+c) + b$$
$$f(x) = Asen(wx+c) + b$$

10. Los alumnos obtienen el modelo matemático que representa la altura de la hélice marcada en su molino de viento.
10. Ingresan la función obtenida en Graphmatica en la misma hoja donde graficaron sus datos.



11. Comparan la gráfica con los datos graficados anteriormente e identifican si la gráfica coincide con los datos.
12. Con ayuda del Graphmatica, en la opción ***ajustar curva***, obtienen un modelo matemático y lo comparan con el que obtuvieron.

Fase de síntesis:
Los alumnos piensan y contestan lo siguiente:

De acuerdo con la gráfica obtenida que representa el giro de las hélices, piensan y contestan lo siguiente:

¿Qué cambiaría en la gráfica si la hélice es más chica o más grande?

¿Qué cambiaría en la gráfica si la base es más alta o más baja?

Si la hélice tuviera un motor que la hiciera girar, ¿qué cambiaría en la gráfica, si girará más rápido o más lento?

Comparan con sus compañeros el modelo matemático que obtuvieron e identifican las diferencias con los otros molinos.

Materiales y recursos:
Tecnológicos: calculadora científica, laptop, proyector, software Graphmatica.

Didácticos: cartón, plástico, unicel, palitos de madera, pegamento, diurex, regla, colores, hojas milimétricas.

Evaluación:
Diagnóstica: En plenaria se preguntan sobre cómo se representa gráficamente el movimiento de una hélice y qué variables pueden intervenir.

Formativa: Retroalimentación y guía a la hora de realizar la actividad propuesta.

Sumativa: Un portafolio de evidencias que contenga lo desarrollado en clase, así como un reporte que muestre lo realizado en la actividad. Integran fotos de la construcción del molino, los cálculos realizados, las gráficas obtenidas en papel milimétrico y software.

Rúbrica para evaluar la actividad

Ítem a evaluar	SI	NO	Parcialmente	Observaciones
Elabora correctamente la tabla de valores ángulo vs altura				
Grafica correctamente los datos obtenidos en la hoja milimétrica				
Grafica correctamente los datos obtenidos en Graphmatica				
De la gráfica, identifica correctamente el valor de los parámetros: periodo, amplitud, desplazamiento vertical y horizontal				
Obtiene de manera correcta el modelo matemático de la forma:				
Utiliza correctamente Graphmatica para realizar la gráfica de la función obtenida.				
Utiliza correctamente Graphmatica para obtener un modelo matemático de los datos graficados.				
Identifica correctamente los cambios que sufriría la gráfica si se hacen cambios en el molino de viento.				

Con el modelo matemático obtenido, se pretende que el alumno sea capaz de analizar la información que tiene sobre el molino de viento construido y la contraste con el modelo algebraico.

Conclusiones: La secuencia de actividades que se presenta está dirigida a que el alumno a partir de algo concreto, como la construcción de un molino de viento, y pueda identificar de inicio un fenómeno de variación periódica, en este caso el movimiento que se presenta en la hélice. Con base en una serie de mediciones como ángulo y altura, el alumno comienza a obtener un registro tabular de las condiciones del fenómeno, lo que le permite generar un registro gráfico al trasladar los datos obtenidos a un plano cartesiano, ya sea con una hoja milimétrica o con ayuda de software. Esta información le permitirá al alumno identificar las características de una función trigonométrica a partir de la gráfica, dando pie a que con esta información pueda obtener un modelo algebraico que represente los datos graficados, a fin de tener un modelo algebraico.

Con el modelo matemático obtenido, se pretende que el alumno sea capaz de analizar la información que tiene sobre el molino de viento construido y la contraste con el modelo algebraico, con la finalidad de que pueda reflexionar sobre lo realizado y conjeturar sobre los cambios que sufriría el modelo matemático si se cambian las condiciones del molino. Esto permitirá al alumno comprender cada una de las fases desarrolladas para obtener el modelo y encontrar sentido a lo realizado, a fin de que su aprendizaje sea significativo.

BIBLIOGRAFÍA:

BARNETT R. (2000). Precálculo: Funciones y gráficas. Mc Graw-Hill.

LARSON, R., Hostetler, R. (1996). Álgebra. Publicaciones Cultural.

STEWARD, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Cengage, Learning.

SWOKOWSKI, C. (2012). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage, Learning.

Una aplicación de funciones trigonométricas en el estudio del nivel del mar

Por:
Lucino Raymundo López | Azcapotzalco
Ivonne Retama Gallardo | Naucalpan

RESUMEN
En la secuencia didáctica los estudiantes utilizan las funciones trigonométricas para modelar la variación del nivel del mar como una situación de comportamiento periódico, utilizando el software GeoGebra, y fomenta la concientización del estudiante de cómo las actividades antropogénicas contribuyen en la modificación del medio ambiente como es el cambio climático.

INTRODUCCIÓN

Según el Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC por sus siglas en inglés), el término cambio climático se refiere a un cambio en el estado medio o en la variabilidad de alguna de las propiedades del clima, que puede ser identificado por pruebas estadísticas y que persiste por largos periodos de tiempo, normalmente décadas, como resultado de la variabilidad natural, e intensificándose como producto de las actividades antropogénicas que causan el incremento de las concentraciones de gases de efecto invernadero.

Los océanos con una superficie superior a dos tercios de nuestro planeta cumplen un papel crucial en la estabilidad de nuestro clima. Los océanos son esenciales en la dinámica climática debido a que estos son capaces de absorber el 93% del calor que se acumula en la atmósfera de la Tierra y una cuarta parte del dióxido de carbono (CO_2) que liberan los combustibles fósiles; los cuales forman parte primordial en casi todas las actividades cotidianas de la vida humana (Moreno Salazar-Calderón, B. & Delgado-Cabrera, F., 2022).

Manifestaciones del cambio climático como el ascenso del nivel del mar, el aumento de intensidad y frecuencia de eventos meteorológicos extremos y una variación compleja en la dinámica de condiciones oceanográficos (ej. salinidad, pH, temperatura, circulación), están impactando a los ecosistemas marinos, a las poblaciones de peces e invertebrados, a la actividad de pescadores y prestadores de servicios turísticos y a la infraestructura física de apoyo con que cuentan las comunidades costeras (IPCC, 2014).

Como se mencionó anteriormente, una de las consecuencias del cambio climático es el aumento del nivel del mar que contribuye a aumentar los impactos en las zonas costeras, incluyendo la erosión, inundación de zonas someras, aumento de daños por tormentas, modificación de los estuarios y de los hábitats, modificación de los niveles freáticos e intrusión salina en los cauces fluviales y aguas subterráneas. En combinación con cambios en el clima marítimo, la erosión, la inundación, tanto la temporal como la permanente, y la afección a las obras marítimas y la explotación de los puertos, son consecuencias directas de los cambios en las dinámicas costeras. Entre otros elementos, los lugares de desembarque para productos pesqueros, embarcaciones y sistemas de cultivos marinos, así como la infraestructura en la línea de costa en las aguas costeras, se podrán ver afectados por cambios tanto en las condiciones medias (ej. temperatura)

como en las extremas (ej. oleaje y nivel del mar en tormentas). Estos problemas, en concreto, tienen un carácter global y, sin duda, se están acrecentando por el efecto del cambio climático (Anadón *et al*., 2009, 149).

Estudios del IPCC (2013) coinciden en un probable escenario extremo de 0,40 m de aumento del nivel del mar para el año 2050, y en 1,20 m para el 2100 (Lizcano, 2019).

En la siguiente secuencia didáctica se pretende mostrar al estudiantado un ejemplo del análisis del nivel del mar a través de una función trigonométrica. Los estudios de cambio climático se realizan considerando largos periodos de tiempo, pero el siguiente trabajo es una forma de cómo el estudiante vincula sus conocimientos de Matemáticas, de una forma práctica, y fomenta la concientización de cómo las actividades antropogénicas contribuyen al cambio de nuestro medio ambiente.

Propósito

Modelar la variación del nivel del mar como una situación de comportamiento periódico y vincular este fenómeno con los estudios para conocer las posibles consecuencias del cambio climático, apoyándose con el uso de un software dinámico.

Aprendizaje

Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

Conceptos

Periodo (T): Es la longitud del intervalo mínimo tomado desde el eje horizontal, a partir de la cual una función repite la gráfica (Santos, 2012).

Amplitud : Es la mitad de la distancia entre el valor máximo y el valor mínimo de la función. Si no se desplaza verticalmente la amplitud se calcula como la distancia tomada en vertical, entre el valor máximo y el eje.

Desplazamiento vertical y horizontal: Suponga $c > 0$ (Stewart, 2012).

- Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia arriba.
- Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia abajo.

Desplazamiento horizontal: Suponga $c > 0$.

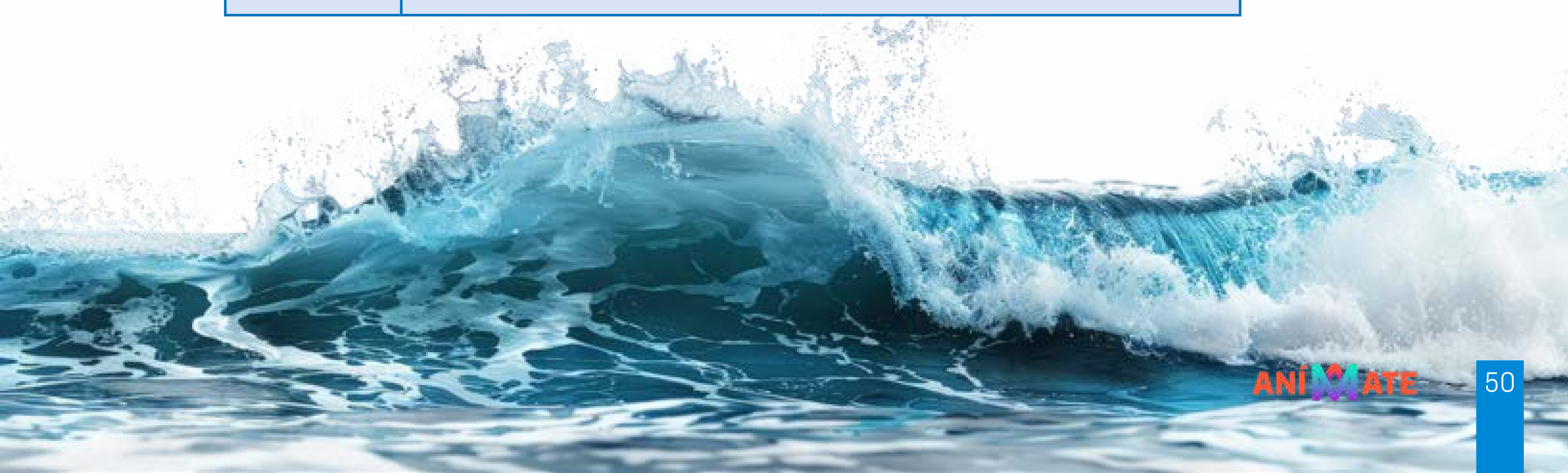
- Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, c unidades a la derecha.
- Para graficar , desplace la gráfica de $y = f(x + c)$, $y = f(x)$ unidades a la izquierda.

Presentación del recurso didáctico

I. SECUENCIA DIDÁCTICA

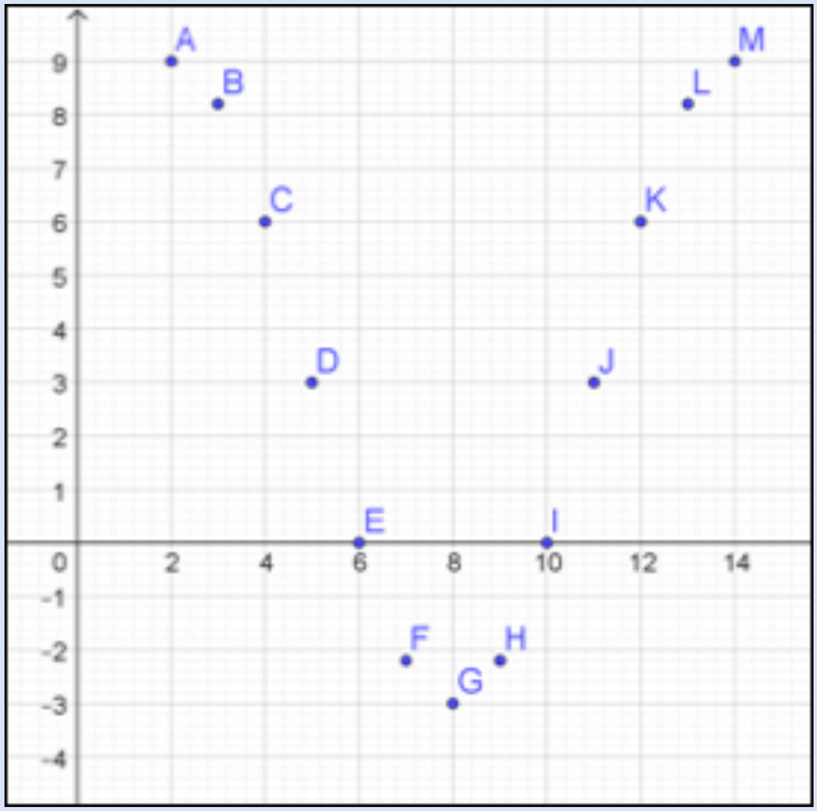
Duración: 120 minutos	
DESARROLLO DE ACTIVIDADES:	
INICIO	El profesor: Da la bienvenida a los estudiantes y menciona que las funciones trigonométricas se pueden utilizar para representar fenómenos de variación periódica. A través de una lluvia de ideas y con la orientación del profesor el estudiante define los conceptos: periodo, amplitud , dominio y rango de la función . Los alumnos investigan qué es el cambio climático y su influencia en el nivel del mar. En plenaria se discute qué se entiende por cambio climático y sus consecuencias, resaltando el aumento del nivel del mar. Los estudiantes descargan el software dinámico GeoGebra para la construción de la gráfica. https://www.geogebra.org/classic, la cual permitirá construir y analizar la gráfica.
DESARROLLO	El profesor plantea a los estudiantes la siguiente situación problemática: En la tabla proporcionada, se ilustra la variación del nivel del mar en playas de Bahías de Huatulco en un periodo de 24 horas. Elabore el modelo matematico correspondiente que describa la variación del nivel del mar en función del número de horas transcurridas desde las 6: 00 de la mañana.

Horas transcurridas desde las 6:00 am	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nivel del agua en pies	9	8.2	6	3	0	-2.2	-3	2.2	0	3	6	8.2	9



DESARROLLO

El estudiante crea la representación gráfica utilizando GeoGebra, partiendo de la información proporcionada por el docente.



Gráfica 1. Representación de horas transcurridas con respecto al nivel de agua en pies (ft).

Con la guía del profesor, el estudiante determina los parámetros de la gráfica 1, y los organiza en la tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de la gráfica.

Valor máximo	9	**Valor mínimo**	**-3**
$\lvert \boldsymbol{A} \rvert$: *amplitud*.	$\frac{9-(-3)}{2}=6$		
Periodo= $\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	Periodo = 14-2=12		

En la gráfica 1 se aprecia que un periodo completo está entre los puntos (2,9) y (14, 9).

Periodo= $\frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	Periodo = 14-2=12

El profesor recomienda a los estudiantes aprovechar el dato del periodo para calcular con precisión el valor del parámetro b.

$$Periodo = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$$

$$12 = \frac{2}{\lvert b \rvert}$$

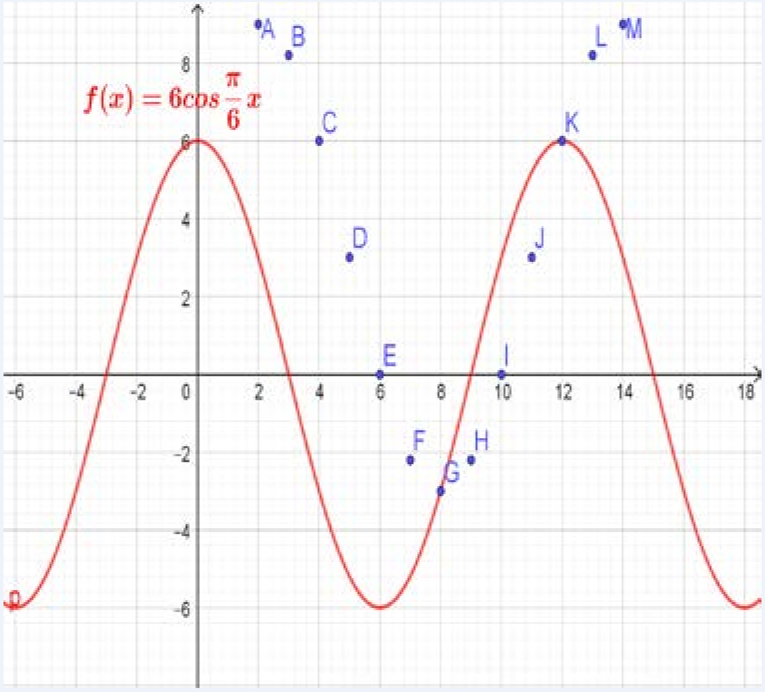
$$12 = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$$

$$\lvert b \rvert = \frac{\pi}{6}$$

Conociendo el valor del parámetro $\lvert b \rvert$, y sustituyendo el valor de $\lvert \boldsymbol{A} \rvert$ la función trigonométrica queda de la siguiente forma:

$$f(x) = 6\cos \frac{\pi}{6} x$$

El estudiante procede a generar en GeoGebra la gráfica de la función encontrada y lleva a cabo un análisis $f(x) = 6\cos \frac{\pi}{6} x$ comparativo con la gráfica 1.

<table>
<tr>
<td>CIERRE</td>
<td>


Gráfica 2. Representación de ajuste gráfica $f(x) = 6\cos\frac{\pi}{6}x$

En plenaria se presenta un análisis de la gráfica:

Como se puede apreciar, la gráfica de la $f(x) = 6\cos\frac{\pi}{6}x$, no logra representar adecuadamente el fenómeno de estudios, lo que indica la necesidad de realizar un análisis más profundo.

Los estudiantes realizan en equipo un análisis minucioso de las gráficas, proceden a resolver las preguntas asignadas y las vinculan con la función, fomentando un entendimiento más profundo.

$$f(x) = A\cos(bx + c) + d$$

¿Qué valor tienen las amplitudes en las gráfica 1 y gráfica 2?

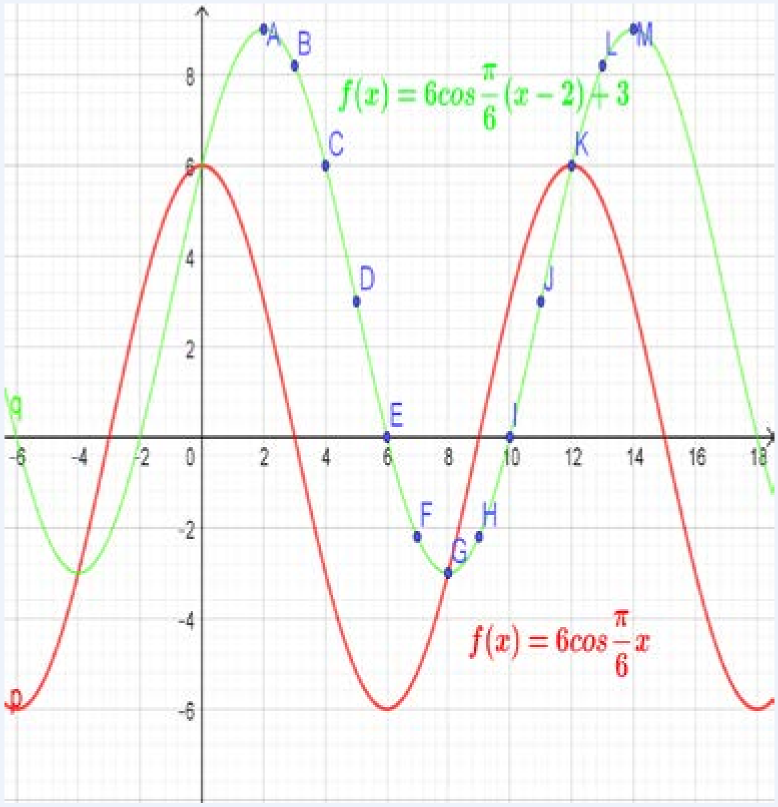
¿Cómo se denomina a la variación entre amplitudes?

¿De qué manera vinculas la variación de las amplitudes con la función, $f(x) = A\cos(bx + c) + d$, y cuál es su valor?

¿Hay un desplazamiento horizontal de la gráfica $f(x) = 6\cos\frac{\pi}{6}x$, con respecto en comparación con la gráfica 1, de ser así cuál es su valor?

¿El desplazamiento horizontal en una función cómo se le conoce?
</td>
</tr>
</table>

El profesor indaga si, a partir de las respuestas al cuestionario, los estudiantes lograron identificar el modelo de la función que representa la variación del nivel del mar en función del número de horas?



Gráfica 3. Representación gráfica del modelo de la función, horas transcurridas, nivel del agua en ft.

En discusión grupal, se revisará la función $f(x) = 6\cos\frac{\pi}{6}(x-2)+3$, y en las conclusiones se preguntará, ¿por qué es importante realizar estudios del nivel del mar en un escenario de cambio climático? ¿Qué acciones se podrían realizar para disminuir el cambio climático?

<table>
<tr><td>ORGANIZACIÓN</td><td colspan="2">Las actividades se realizarán de forma individual, en equipo y grupal, según corresponda.</td></tr>
<tr><td>MATERIALES DE APOYO</td><td colspan="2">Lizano Rodríguez, O. (2019). El calentamiento global y su relación con el impacto en la pesquería en el Golfo de Nicoya, Costa Rica. InterSedes: Revista de las Sedes Regionales, XX(41), 190-207. https://doi.org/10.15517/isucr.v20i41.38837</td></tr>
<tr><td>RECURSOS DIDÁCTICOS</td><td colspan="2">Computadora y proyector, un dispositivo móvil, software GeoGebra.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LA SECUENCIA</td><td>Aspectos para evaluar:</td><td>Evaluación:</td></tr>
<tr><td>• Elaboración de la gráfica
• Resolución del cuestionario
• Análisis de las gráficas y su expresión escrita al redactar su conclusión</td><td>• Identifica las operaciones y procedimientos que debe realizar para obtener las respuestas</td></tr>
</table>

CONCLUSIONES

A través de la secuencia didáctica los estudiantes emplean las funciones trigonométricas para simular el nivel del mar, mostrándolo como un fenómeno de variación periódica. Esta metodología les facilita la conexión de conceptos matemáticos con desafíos ambientales reales, profundizando su comprensión sobre las complejas dinámicas del cambio climático. Además de que promueve una reflexión crítica sobre el impacto significativo de las actividades humanas en la alteración de nuestro ecosistema, incentiva la adopción de un enfoque más responsable y consciente hacia la preservación del medio ambiente.

FUENTES DE INFORMACIÓN

ANADÓN, R. (2009). El Cambio Climático: Efectos en los ecosistemas marinos y en el sector pesquero. En: Cambio Climático Global. De Luis Calabuig, E. (ed.). Fundación Monte León 54-67

CCH (2016). Programas de Estudio Matemáticas I-IV. UNAM. https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/MATEMATICAS-I-IV.pdf

IPCC. (2013). Cambio climático 2013. Bases físicas. Resumen técnico y preguntas frecuentes. 204 págs.

IPCC. (2001). Working Group II: Impacts, Adaptation and Vulnerability. Cap. 14. Latin America. 14.1.2.2. Future: Climate Scenarios.

LIZANO, O. 2019. El calentamiento global y su relación con el impacto en la pesquería en el Golfo de Nicoya, Costa Rica. *InterSedes: Revista de las Sedes Regionales*, XX (41), 190-207. https://doi.org/10.15517/isucr.v20i41.38837

MINA, M. (2022). Cambio climático y pesca, relación insostenible UNA mirada hacia la gobernanza climática para la sostenibilidad pesquera en Latinoamérica DOI: 10.32870/in.vi24.7238

MNET (s.f.). Modelando con funciones trigonométricas.

HTTP://quiz.uprm.edu/tutorials_master/fn_trig_mod/fn_trig_mod.html

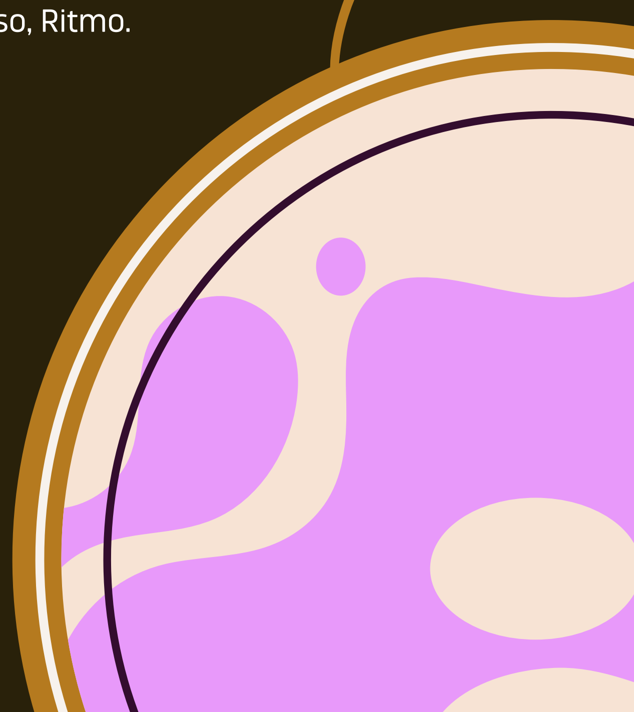
MORENO Salazar-Calderón, B. & Delgado-Cabrera, F. (2022). Indicadores de vulnerabilidad al cambio climático de comunidades pesqueras: una revisión a nivel mundial, 2012 - 2022. *Población y Desarrollo* , *28*(55), 21-34. Epub December 00, 2022.https://doi.org/10.18004/pdfce/2076-054x/2022.028.55.021

El *algo-ritmo* de Euclides

Por:
Diego González Moreno

RESUMEN
En este artículo explicamos cómo se puede utilizar el algoritmo de Euclides (un método creado para calcular el máximo común divisor de dos números enteros) para generar ritmos musicales. Los ritmos que se obtienen con este procedimiento reciben el nombre de Ritmos Euclidianos y se caracterizan por distribuir de manera equitativa un número determinado de golpes en un intervalo de tiempo.

Palabras clave: Número entero, Divisibilidad, Máximo común divisor, Algoritmo, Pulso, Ritmo.



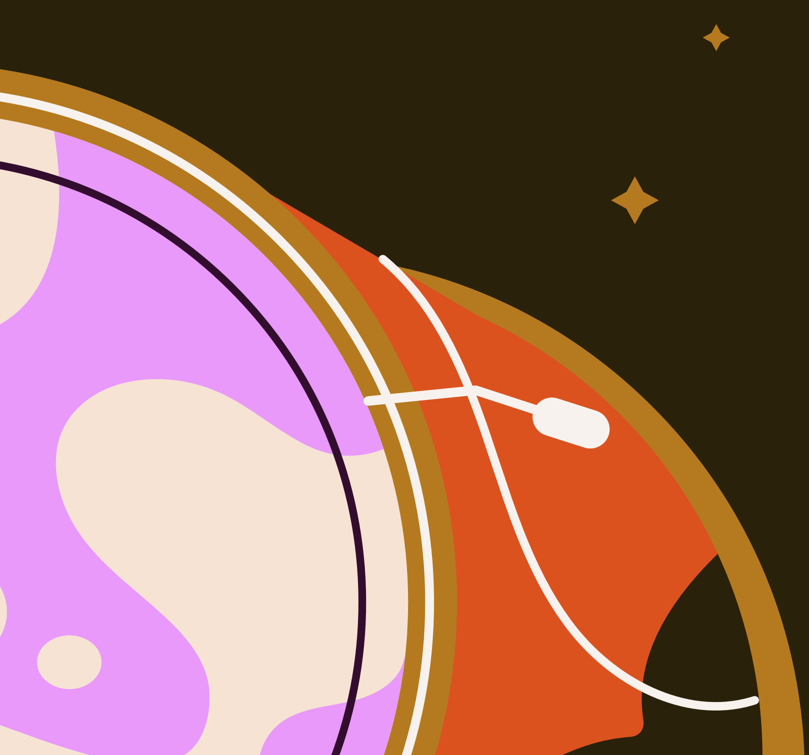
1. INTRODUCCIÓN

¿Qué tienen en común el máximo común divisor de 8 y 5 y la canción Hound Dog de Elvis Presley? Al final de este artículo habrás descubierto esta extraña y bonita relación, que quizás ya no te parecerá tan sorprendente.

Descubrir relaciones entre conceptos tan dispares como el máximo común divisor de dos números enteros y la música es asombroso. ¿Quién diría que el trabajo matemático realizado por Euclides en el siglo III a. C. tendría aplicaciones en la creación de ritmos musicales que abarcan géneros como el Rockabilly, el tresillo cubano, la cumbia y la música electrónica?

En 2005, Godfried Toussaint [3] presentó un método para producir ritmos musicales utilizando el algoritmo de Euclides, que fue diseñado originalmente para encontrar el máximo común divisor de dos enteros. Los ritmos generados con este método tienen la peculiaridad de distribuir los acentos de la manera más uniforme posible.

En este trabajo se explicará el algoritmo que Toussaint utiliza para generar ritmos y su relación con el algoritmo de Euclides. Comenzaremos por explorar los conceptos de divisibilidad y máximo común divisor, y describiremos cómo se utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor. Luego, nos adentraremos en el mundo del ritmo y en el algoritmo de Toussaint (utilizado para crear ritmos). Finalmente, mostraremos la relación de este algoritmo con el de Euclides.



2. EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Antes de explicar qué es el máximo común divisor debemos hablar de *divisibilidad*. Piensa en dos números enteros a los cuales llamaremos a y b; decimos que b **divide** a a , o que a es **divisible** entre b, si la división de a entre b es exacta, es decir, si al dividir a entre b el resto es 0.

Por ejemplo, el 6 divide a 18 (o 18 es divisible entre 6), ya que al dividir 18 entre 6 el residuo es 0, es decir,

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 18 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 18 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array}$$

Algo que sucede con la divisibilidad de dos números es que si a b divide a a, entonces existe un entero q que cumple $a = bq$. Por ejemplo, en el caso de 18 y 6 tenemos que 18=6(3), en este caso $q = 3$.

Por otro lado, si b no divide a, entonces el resto de la división de b entre a es distinto de 0, y hay dos enteros q y r que cumplen

$$a = bq + r,$$

donde $1 \leq r < b$. Al entero q se le conoce como el **cociente** y a r como el **residuo** o resto de la división de b entre a.

Por ejemplo, 6 no divide a 21, y se puede ver que el cociente y el resto de la división de 21 entre 6 son $q = 3$ y $r = 3$. Entonces podemos escribir

$$21 = 6\,(3) + 3,$$

y con la "casita" de la división tenemos:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 21 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 18 \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{r}{} & 3 \end{array}$$

Con la idea de divisibilidad entendida, podemos definir el máximo común divisor de dos enteros. Si a y b son dos enteros, el **máximo común divisor** de estos, al cual denotamos por $mcd(a,b)$, es el entero más grande que divide a a y a b.

Veamos un ejemplo para aclarar la situación. Considera los números 24 y 36. Para encontrar el máximo común divisor de éstos necesitamos determinar cuál es el divisor más grande que divide a ambos (de ahí el nombre). Para esto podemos hacer una lista con los divisores de cada número.

- Los divisores de 24 son: 1, 2, 4, 6, 8, 12 y 24.
- Los divisores de 36 son: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

Podemos ver que los divisores que tienen en común el 24 y el 36 son 1, 2, 4, 6 y 12. Así, el máximo común divisor de 24 y 36 es 12, y escribimos

$$mcd(24,36)=12$$

El máximo común divisor tiene muchas utilidades, por ejemplo, se utiliza en la resolución de ecuaciones, en la simplificación de fracciones, en el análisis de algoritmos y la criptografía, entre muchas otras. Debido a las utilidades que tiene este concepto, es importante diseñar métodos “eficientes” que encuentren este valor. Uno de estos métodos se debe a Euclides.

2.1 El algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides es un procedimiento diseñado para encontrar el máximo común divisor de dos enteros positivos. Este algoritmo fue descrito por Euclides en su libro *Elementos*, y está basado en el algoritmo de la división y en hacer divisiones de manera sucesiva. El algoritmo de la división es un teorema que establece lo siguiente:

Teorema (algoritmo de la división): Dados dos enteros positivos a y b, con b distinto de 0, existen dos enteros positivos q y r (el cociente y el residuo), que cumplen:

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b. \qquad (1)$$

Una consecuencia del algoritmo de la división está relacionada con el máximo común divisor de los números a, b y el residuo r.

Observación 1. Todo divisor común de a y b también es un divisor de r.

Esto se puede ver porque si d es un divisor de a y b, entonces las divisiones de a / d y b / d son también números enteros. Si dividimos la ecuación (1) entre d, tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{d}q + \frac{r}{d}$$

Como a / d y b / d son enteros, entonces r / d también debe ser entero, es decir, d también es un divisor de r. Ahora, si d es el máximo común divisor, esta propiedad se sigue cumpliendo, y se puede ver que

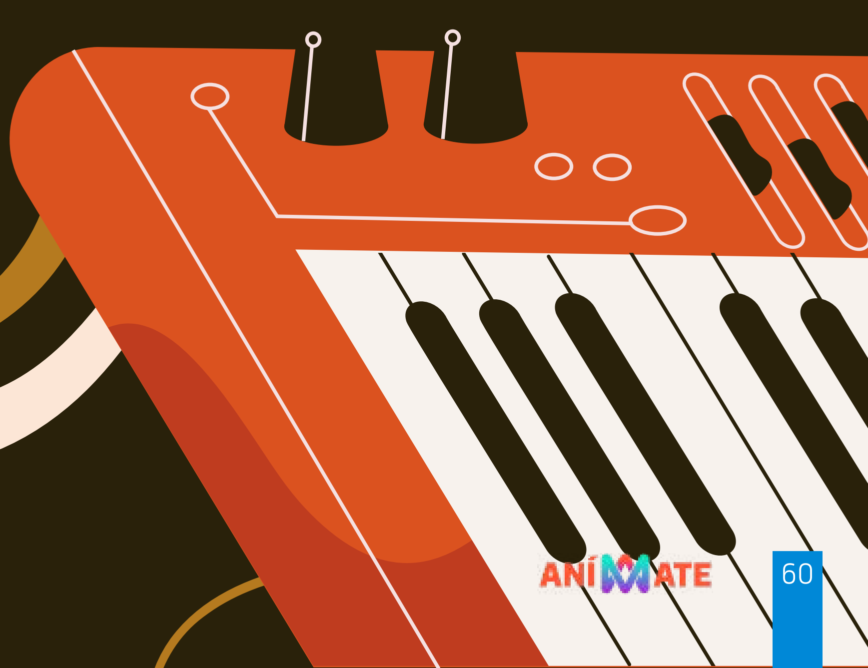
$$mcd(a,b) = mcd(b,r)$$

Veamos un ejemplo para entender esta observación. Considera el 40 y el 24, se puede ver que el máximo común divisor de estos dos números es 8. Por otro lado, el resto de dividir 40 entre 24 es 16, ya que $40 = 24(1) + 16$, en este caso el residuo es 16. Esta observación nos dice que el máximo común divisor de 24 y 16 también es 8, en notación tenemos

$$mcd(40, 24) = mcd(24, 16) = 8$$

También tenemos la siguiente observación:

Observación 2. El máximo común divisor de a y 0 es a, es decir, $mcd(a,0) = a$.



La causa de esto es que todo entero a divide al 0, ya que $0=a(0)$, y como a divide a a, entonces el máximo común divisor de a y 0 es a.

Con estos hechos entendidos, estamos listos para conocer una versión moderna del algoritmo de Euclides [2].

Comenzamos con dos enteros a y b para los cuales queremos encontrar el máximo común divisor, y supongamos que $a \leq b$.

1. Dividimos a entre b y obtenemos el residuo, al cual llamaremos r. Por el algoritmo de la división tenemos

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b .$$

2. Si r es igual a 0, entonces el algoritmo termina y el $mcd(a, b)$ es igual a b.
3. Si r es distinto de 0, entonces dividimos b entre r y obtenemos un nuevo residuo, al cual llamaremos r_1. Es decir,

$$b = rq_1 , \text{ con } 0 \leq r_1 < r.$$

4. Si r_1 es igual a 0, el algoritmo termina y el $mcd(b, r)$ es r, y por la observación 1 tenemos que

$$mcd(a, b) = mcd(b,r) = r,$$

y así habríamos encontrado el máximo común divisor de a y b.

5. Si r_1 es distinto de 0, volvemos a realizar una división, ahora dividimos r entre r_1, obteniendo así un residuo r_2. Es decir,

$$r = r_1q_1 + r_2, \text{ con } 0 \leq r_2 < r_1.$$

6. Si r_2 es igual a 0, el algoritmo para y el $mcd(r, r_{1)}$ es r_1, y por la observación

$$mcd(a, b) = mcd(b, r) = mcd(r, r_{1)}= r_1,$$

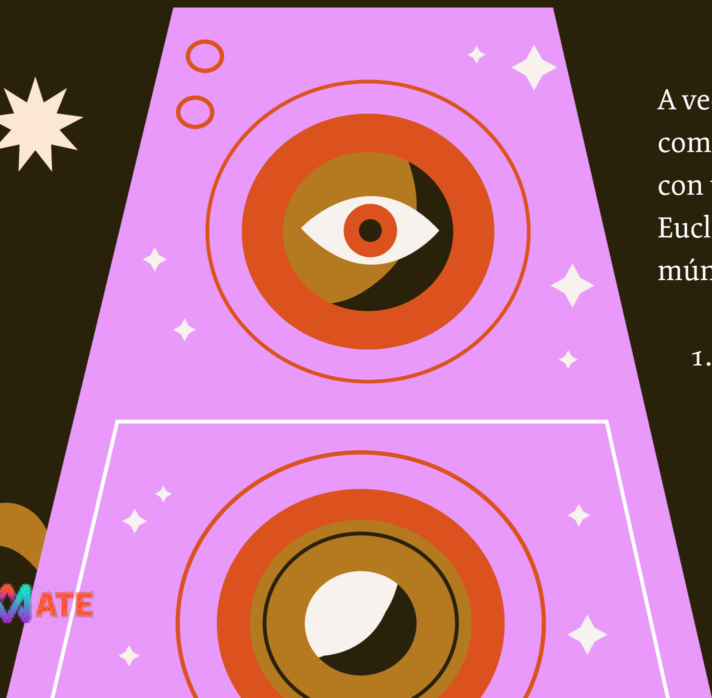
encontrado el máximo común divisor de a y b.

7. Seguimos realizando estas divisiones hasta obtener un residuo igual a cero (esto sucede porque en cada paso el residuo se va haciendo más pequeño). En ese momento el algoritmo se detiene y el máximo común divisor es el último residuo distinto de 0.

A veces entender un algoritmo puede ser complicado, así que aclaremos las ideas con un ejemplo. Utilicemos el algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de 40 y 24.

1. Primero dividimos entre y nos fijamos en el residuo. Entonces,

$$40 = 24\ (1) + 16,$$



en este caso el residuo es $r = 16$. Por la observación tenemos

$$mcd(40, 24) = mcd(24, 16) = mcd(16, 8).$$

2. Como $16 \neq 0$, entonces dividimos 24 entre 16 y volvemos a considerar el residuo. Así,

$$24 = 16(1) + 8.$$

Según el algoritmo de Euclides, tenemos que $r_1 = 8$, y por la observación 1

$$mcd(40, 24) = mcd(24, 16) = mcd(16, 8)$$

3. Como $8 \neq 0$, volvemos al paso anterior considerando los números 16 y 8. Entonces

$$16 = 8(2) + 0.$$

Por la observación 1

$$mcd(40, 24) = mcd(24, 16) = mcd(16, 8) = mcd(8, 0).$$

Como $mcd(8,0) = 8$, por la cadena de igualdades anterior, hemos encontrado que $mcd(40, 24) = 8$, que es precisamente el último residuo distinto de 0.

3. EL RITMO

El ritmo es una cualidad inseparable de la música. Podemos pensar a éste como la organización de sonidos y silencios a lo largo del tiempo.

El ritmo se puede crear a través de patrones, por ejemplo, si golpeamos un tambor cada segundo, se establece un ritmo constante y regular, como si fuera un latido marcando el tiempo de la música.

Sin embargo, el ritmo no se limita a una repetición constante. También puede ser variado y jugar con patrones diferentes. Por ejemplo, si golpeamos el tambor una vez, descansamos un segundo y luego lo golpeamos dos veces seguidas, creamos un ritmo distinto que sería así:

golpe - silencio - golpe - golpe.

A los instantes de tiempo en donde podemos dar un golpe de tambor o dejar un silencio los llamaremos **pulsos de tiempo** o simplemente **pulsos**. Así, el ritmo que acabamos de tocar distribuye 3 golpes en 4 pulsos, y en este caso cada pulso dura un segundo. También podemos repetir este patrón de manera indefinida a lo largo del tiempo.

Una forma matemática de describir un ritmo es a través de una sucesión de ceros y unos. La longitud de la sucesión es el número de pulsos que vamos a considerar. Los 1 (uno) representan los golpes de tambor, y los 0 (cero) los silencios. Entonces, el ritmo con el que estamos jugando estaría representado por la siguiente sucesión:

[1 0 1 1].

Si repetimos esta sucesión a lo largo del tiempo creamos el siguiente patrón rítmico:

[1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 ...] .

En la siguiente sección vamos a explicar el algoritmo de Toussaint, que nos da una forma de repartir de manera equilibrada una cantidad de golpes de tambor en una cierta cantidad de pulsos.

3.1 Ritmos euclidianos

Los ritmos Euclidianos fueron descritos por Godfried Toussaint en su artículo *The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms*. En ese trabajo Toussaint muestra cómo la estructura del algoritmo de Euclides se puede utilizar para generar una gran variedad de ritmos.

Usaremos un ejemplo para describir el algoritmo. Imagina que queremos distribuir 6 golpes de tambor en 16 pulsos de tiempo. Como dijimos antes, esto lo podemos representar a través de una sucesión de longitud 16 formada de 0 (ceros) y 1 (unos).

Así, esta sucesión tendrá 16 dígitos con 6 unos y 10 ceros.

Para construir el ritmo hacemos los siguientes pasos:

1. Primero formamos una línea, colocando primero los 1 (unos) y luego los 0 (ceros) para obtener la siguiente sucesión:

   1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

2. Ahora, colocamos un debajo de cada . Esto forma 6 grupos de columnas con 1 y 0, sobran 4 ceros; teniendo la siguiente configuración:

   1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0

3. Continuamos colocando los ceros restantes debajo de las columnas. Entonces colocamos los ceros que sobraron debajo de las primeras columnas, quedando la siguiente situación:

   1 1 1 1 1 1
   0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0

Así, nos quedan cuatro columnas con tres dígitos (1, 0 y 0) y sobran dos columnas con dos dígitos (1 y 0).

4. Repetimos el proceso. Tomamos las dos columnas que sobran (aquellas que tienen un 1 y un 0) y las colocamos debajo de las primeras dos columnas. Obteniendo lo siguiente:

   1 1 1 1
   0 0 0 0
   0 0 0 0
   1 1
   0 0

5. Finalmente colocamos las dos columnas restantes debajo de las primeras dos, obteniendo:

   1 1
   0 0
   0 0
   1 1
   0 0
   1 1
   0 0
   0 0

El proceso termina aquí, porque ya no hay más columnas para mover. En general, el algoritmo termina cuando ya no haya más columnas para mover o solo quede una columna por mover.

Para encontrar el ritmo resultante hay que leer las columnas de izquierda a derecha. Esto nos genera el siguiente ritmo:

[1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0]

Así, en los 16 pulsos de tiempo que utilizamos tenemos que tocar el tambor en el primer tiempo, el cuarto, el sexto, noveno, doceavo y catorceavo pulso. Este ritmo lo podemos repetir a lo largo del tiempo para tener un patrón ritmo más duradero.

¿Cómo se relaciona este ritmo con el algoritmo de Euclides?

Observa que en las repeticiones del algoritmo utilizado para generar el ritmo aparecen los divisores y restos que utilizamos en el algoritmo de Euclides. En el ejemplo que acabamos de hacer acomodamos 6 golpes en 16 pulsos. Veamos qué sucede cuando utilizamos el algoritmo Euclidiano para encontrar el máximo común divisor de 16 y 6. Entonces,

$$16 = 6\,(2) + 4,$$
$$6 = 4\,(1) + 2,$$
$$4 = 2\,(2) + 0.$$

De acuerdo al algoritmo de Toussaint, en el segundo paso tenemos 6 columnas, cada una con dos dígitos (1 y 0) y 4 columnas formadas por un solo dígito (el 0). Esto sucede porque al efectuar la división de 16 entre 6, tenemos que 16 = 6(2) + 2, es decir, tenemos 6 columnas (con dos elementos cada una) y sobran 4 ceros:

1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 ; $16 = \underline{6}(2) + \underline{4}$.

En el siguiente paso colocamos las columnas de la derecha debajo de las primeras cuatro columnas. En términos del algoritmo Euclidiano estamos considerando el cociente y el residuo de la división de 6 entre 4, es decir, 6 = 4(1) + 2. Entonces tenemos 4 columnas con tres dígitos (1, 0 y 0) y dos columnas con 2 dígitos (1 y 0).

1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 ; $6 = \underline{4}(1) + \underline{2}$.
0 0 0 0

Finalmente, colocamos las dos columnas de la derecha debajo de las primeras dos columnas. Después de esto sobrarán dos columnas, estas las volvemos a acomodar debajo de las primeras dos columnas, quedando así dos columnas sin columnas de sobra, teniendo lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} & 1\ 1 \\ & 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0 \\ 1\ 1 & 1\ 1 \\ 0\ 0 & 0\ 0 \\ & 0\ 0 \end{array} \; ; 4 = \underline{2}(2) + \underline{0}.$$

En este último paso estamos considerando la división entre 4 y 2, y aquí termina el proceso.

Utilizamos $E(a, b)$ para referirnos al ritmo que se obtiene al repartir a golpes de tambor en b pulsos de tiempo. Así,

$$E(6, 16) = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0].$$

3.2 Canciones con ritmos euclidianos

Una característica de los ritmos euclidianos es que estos distribuyen los golpes en los pulsos de la forma más regular posible. Este tipo de ritmos normalmente suenan bien, y por esto han sido utilizados desde hace siglos en todas las culturas para crear música, aunque no tenían este nombre ni se conocía su relación con el algoritmo de Euclides.

Uno de los ritmos euclidianos más famosos es el que distribuye 3 acentos en 8 pulsos, es decir, el $E(3, 8)$. Si utilizamos el algoritmo de Toussasint para hallar este ritmo, encontraríamos el siguiente patrón:

$$E(3, 8) = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]$$

Este ritmo también se conoce como *tresillo cubano* y ha sido muy utilizado en el pop, el rock y hasta en el reggaetón. Por ejemplo, se puede escuchar en canciones como *Clocks* de Coldplay, *Shape of you* de Ed Sheeran o Despacito.

Otro ritmo euclidiano muy popular es el $E(5, 8)$ que tiene la siguiente estructura:

$$E(3, 8) = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

Este ritmo se conoce como el cinquillo y hay muchas canciones que lo utilizan, por ejemplo: *Hound dog* de Elvis Presley. Este ritmo euclidiano se puede escuchar en el ritmo que llevan las palmas es el cinquillo [4].

Otros ejemplos de ritmos Euclidianos son:

- En la samba brasileña los Euclidianos $E(7, 16) = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ y $E(9, 16) = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ son muy utilizados.
- El ritmo $E(3, 4) = [1\ 0\ 1\ 1]$ es el prototipo de la cumbia colombiana.
- La banda de rock progresivo Pink Floyd tomo el ritmo $E(3, 7) = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0]$ y lo modificó un poco, en lugar de comenzar el patrón en el tiempo uno, lo empieza en el tiempo 4 para convertirlo en [1 0 1 0 1 0 0] y utilizarlo como patrón rítmico en *Money*.

Para encontrar una lista más amplia de ritmos Euclidianos encontrados en la música del mundo, pueden revisar el trabajo de Demaine *et al.* [1].

4. CONCLUSIONES

En resumen, en este artículo exploramos la bonita relación que existe entre la música y las matemáticas, utilizando los ritmos Euclidianos con su capacidad para distribuir acentos de manera uniforme en un cierto número de pulsos de tiempo, y usamos el algoritmo de Euclides. Este vínculo entre música y matemáticas nos muestra que las matemáticas pueden encontrarse en todos lados, enriqueciendo así nuestra apreciación de la ciencia y el arte.

BIBLIOGRAFÍA

DEMAINE, E. D., Gomez-Martin, F., Meijer, H., Rappaport, D., Taslakian, P., Toussaint, G. T., Winograd, T., y Wood, D. R. (2009) *The distance geometry of music*, Comput. Geom. 42(5), 429–454.

MOTZKIN, T., (1949). *The Euclidean Algorithm,* Bull. Amer. Math. Soc. 55, 1142-1146.

TOUSSAINT, G. T. (2005) *The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms*, Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science, 47–56.

THE Ed Sullivan (9 de septiembre 2020). Elvis Presley, “Hound Dog” (October 28, 1956) on The Ed Sullivan Show, Youtube: https://youtu.be/aNYWl13IWhY

Construcción del concepto de elipse a través del uso de las TIC y software dinámico

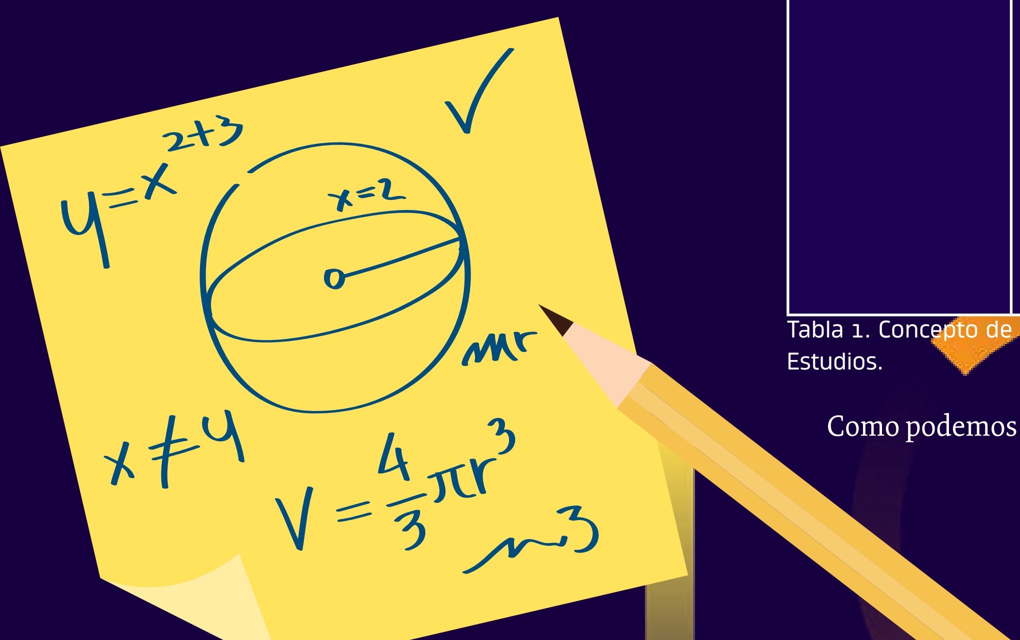
Por:
Juan Carlos Ramírez Maciel
juancarlos.ramirezm@cch.unam.mx

RESUMEN
En este estudio los objetivos son lograr y analizar los aprendizajes relacionados con el concepto de elipse como lugar geométrico. Para ello, se diseñó e implementó una secuencia didáctica con el fin de introducir al estudiante en el estudio del concepto de elipse como un lugar geométrico; dicha secuencia fue aplicada a estudiantes de tercer semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades del plantel Naucalpan. Para su diseño, se realizó una revisión del programa vigente de matemáticas del CCH, para lograr los objetivos y poder encontrar los elementos que nos permitan establecer coherencia en la secuencia; las actividades se implementaron de manera presencial y en línea. Finalmente, se presenta un análisis de la implementación de la secuencia para tener elementos que permitan inferir los aprendizajes logrados y discutir sobre la pertinencia de la secuencia.

Palabras clave: *Elipse, Lugar geométrico, Visualización, Software dinámico.*

1. INTRODUCCIÓN

En este estudio es de nuestro interés lograr los aprendizajes del programa de estudios de matemáticas; en particular trabajaremos la unidad cuatro de la asignatura de Matemáticas 3, relacionada con el concepto de elipse. Para ello diseñamos una secuencia didáctica que nos permite introducir al estudiante al estudio del concepto de elipse como lugar geométrico y los elementos que la componen; dicha secuencia fue aplicada a estudiantes de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades del plantel Naucalpan del tercer semestre. El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en primer lugar, se realizó una revisión del programa vigente del CCH para encontrar los elementos que nos permitan establecer los objetivos de la secuencia con relación a los aprendizajes a lograr. Posteriormente mostraremos aspectos metodológicos sobre el diseño e implementación. Del análisis de los resultados se observa que la estructura de la secuencia les permite construir conocimiento, el cual permite llegar, en general, de una manera adecuada a los aprendizajes; sin embargo, debemos destacar que los resultados también arrojan que debe haber mejoras tanto en el diseño como en la evaluación. Por otra parte, el uso del software dinámico juega un papel relevante debido a la visualización que se puede hacer del objeto de estudio, ya que a partir de ella el estudiante arriba a las condiciones necesarias para que un punto en el plano trace el lugar geométrico de interés, que es en este caso la elipse.



2. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En el plan vigente de estudios de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, en el abordaje del concepto de elipse se proponen otros métodos de acercamiento para lograr los aprendizajes como se muestra en la Tabla 1:

Aprendizaje	Temática	Estrategia sugerida
Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identifica sus elementos.	Definición de la elipse como lugar geométrico Elementos de la elipse: vértices, focos, ejes mayor y menor, distancia focal, excentricidad y lado recto.	El profesor propone la construcción de una elipse usando el método del jardinero o con doblado de papel, y guía el análisis de lo realizado a fin de que se arribe a la definición como lugar geométrico. Propone las definiciones de otros elementos importantes de la elipse y planteará actividades de identificación.

Tabla 1. Concepto de Elipse en el Programa de Estudios.

Como podemos observar, para abordar

el aprendizaje en el que estamos interesados se propone el uso del método del jardinero o bien el doblado de papel, métodos altamente probados en su eficacia para lograr los aprendizajes. Es importante destacar que en lo relativo a las estrategias propuestas no se sugiere el uso de software dinámico, por lo que pretendemos lograr o contribuir en la innovación en ese sentido. A continuación, presentamos algunos aspectos teóricos en los que se sustenta el trabajo y la apuesta por el uso de tecnología.

2. 1 Visualización

Para el diseño de la secuencia se propone el uso de material didáctico relacionado con el uso de software dinámico, donde el proceso de visualización se vuelve fundamental, ya que es un elemento que juega un rol muy importante en el razonamiento matemático y la resolución de problemas de matemáticas (Clements, 2014) y su uso permite extraer aspectos e indicaciones que permitan mejorar la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Por su parte, Duval (2002) distingue entre visión y visualización; por un lado, la visión es la percepción directa de un objeto espacial, necesita exploración mediante movimientos físicos y no hay una comprensión completa del objeto, mientras que la visualización como representación semiótica de un objeto hace visible todo lo que no es accesible a la visión y aporta una comprensión global del objeto. El trabajo de Arcavi (2013) considera a la matemática como una creación humana que se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no solo en el campo de la geometría, y describe a la visualización en términos muy generales de la siguiente manera: “La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas” (Arcavi, 2003, p. 217).

En este trabajo se considera a la visualización como el uso de objetos visuales, los cuales permitirán al estudiante interpretar, argumentar y desarrollar sus ideas; el objetivo es que el estudiante construya la representación gráfica, construyendo los conocimientos necesarios para la comprensión del objeto de estudio.

2. 2 Uso de software en la enseñanza de las matemáticas

Respecto al uso de software dinámico, se ha encontrado que éste proporciona a los estudiantes la posibilidad de aprender conceptos geométricos y explorar sus relaciones fácilmente (Ezquerro, 2014). Por lo anterior, se considera que el uso del software dinámico es una herramienta adecuada para la enseñanza y aprendizaje de la elipse, ya que en principio ayudará a mejorar y desarrollar la visualización (componente clave del razonamiento matemático), como anteriormente se ha mencionado. Se propone el uso de material didáctico relacionado con el uso de software dinámico, donde el proceso de visualización se vuelve fundamental, tal

El software dinámico puede contribuir a que el estudiante entienda el problema, desde ver que, efectivamente, se trata de un problema de variación, hasta situarse en una posición en la que tenga acceso a la solución.

como se menciona en Sepúlveda y García (2011). El software dinámico puede contribuir a que el estudiante entienda el problema, desde ver que, efectivamente, se trata de un problema de variación, hasta situarse en una posición en la que tenga acceso a la solución. Por otra parte, en el trabajo de Díaz *et al.* (2015) se menciona que las actividades de aprendizaje en línea deben ser planificadas y diseñadas con diferente nivel cognitivo, para que permita la conexión del currículo matemático con las actividades cotidianas de los estudiantes, incidiendo en su concepción sobre la utilidad y el uso de las matemáticas fuera del aula. Por lo anterior, el diseño de una secuencia que pretende por un lado establecer una sistematización de experiencias basadas en el uso de software dinámico, el cual consideramos permite al estudiante extraer propiedades de figuras geométricas, y por otro lado explorarlas considerando el enfoque didáctico del Colegio. Las actividades de aprendizaje de la secuencia están clasificadas en actividades previas, de contenido e integradoras, elementos importantes del diseño (Díaz *et al.* 2015).

De lo anterior tenemos la hipótesis de que el trazo que dejan los puntos en el plano, cuando se activa la función rastro, permitiría al estudiante percibir, por un lado, que son una infinidad de puntos los que conforman a la elipse, y por el otro que éstos satisfacen que la suma de sus distancias a un punto fijo y a una recta es la misma. Esta visualización de elementos en el plano permitirá que el alumno construya y logre el aprendizaje.

3. DISEÑO DE LA SECUENCIA

En esta sección se presenta el diseño de la secuencia, considerando el aprendizaje tal como lo indica el programa de estudios:

"Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos" (CCH, 2016).

Esto permite delimitar los objetivos específicos de la secuencia, los cuales serán que el alumno:

- Comprenda el concepto de elipse
- Identifique sus elementos.

A continuación, se presenta la secuencia

Inicio	***ACTIVIDAD 1.1. Desarrollo de los materiales para los aprendizajes.*** Se diseñó un applet en Geogebra, esta consta de tres pantallas, que a continuación se describen: 1. *Pantalla principal. Se indican las instrucciones* 2. *Actividad 1.* **En esta actividad se pretende que el alumno interactúe con la animación para visualizar el lugar geométrico:** 3. *Actividad 2. Identificación de los elementos de una elipse.* Esta applet se puede consultar en la siguiente dirección electrónica: https://www.geogebra.org/m/dqcarxmf
Desarrollo	***ACTIVIDAD 1.2. Desarrollo de las actividades.*** Dejamos al lector el link que permite accesar a las actividades: https://docs.google.com/document/d/1bXiWcpxUsjGGFpCcoZzL6UVYgE2Ndn6D/edit?usp=sharing&ouid=118095326531581402647&rtpof=true&sd=true
Síntesis	***ACTIVIDAD 1.3 Cierre de la actividad*** Diseño del cuestionario de evaluación en Socrative, el cual consta de 8 preguntas, las cuales presentaremos en la siguiente sesión.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación, presentamos los resultados que se obtuvieron de la implementación del cuestionario en línea (Tabla 2, fig. 8):

	Pregunta	% de Aciertos sesión en presencial	% de Aciertos sesión en Línea
1	La elipse como lugar geométrico se define como:	55%	72%
2	Es el segmento de recta perpendicular al eje mayor que pasa por el foco:	50%	56%
3	Segmento de recta que une a dos puntos de la elipse y que contiene a los dos focos:	65%	74%
4	Segmento de recta perpendicular al eje mayor que une dos puntos de la elipse pasando por su centro:	70%	40%
5	La distancia semifocal es:	55%	49%
6	Si los focos de la elipse están en el mismo punto la forma de la elipse es:	70%	84%

	Pregunta	% de Aciertos sesión en presencial	% de Aciertos sesión en Línea
7	Segmento de recta que une el centro con un punto de la elipse y que contiene al foco.	65%	51%
8	Segmento de recta perpendicular al eje mayor que une el centro con un punto de la elipse:	55%	40%

Tabla 2. Resultados de la implementación

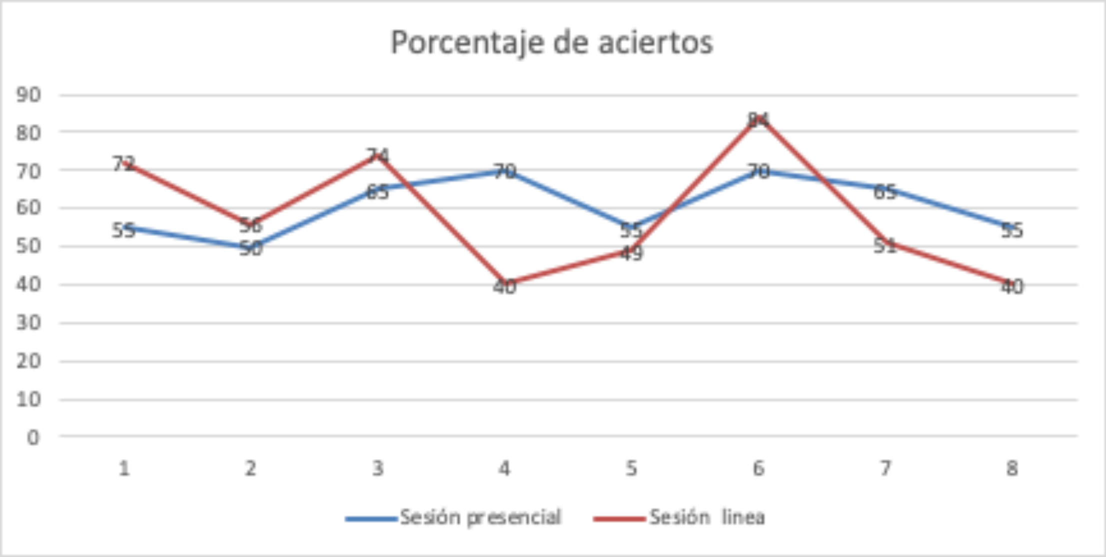
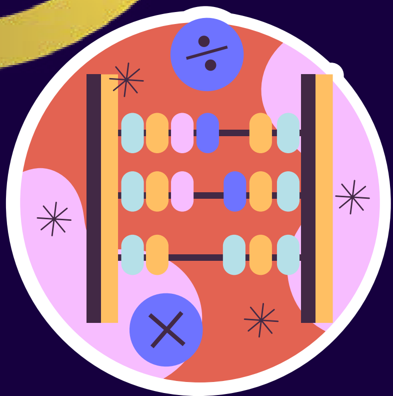


Figura 1. Porcentaje de aciertos ambas sesiones.

En la tabla 2 y figura 8 se presenta el porcentaje de aciertos para las sesiones en línea y la sesión presencial; para la sesión en línea se tiene una muestra de 43 alumnos y en la sesión presencial la muestra fue de 20 alumnos. De los datos obtenidos se observa que:

1. Los alumnos que realizaron la actividad en línea tuvieron un mayor éxito en la pregunta relacionada con la definición de elipse como lugar geométrico, en un 72% contra un 55%.
2. El pico más alto de aciertos corresponde a la pregunta 6 relacionada con la forma de la elipse de focos en el mismo lugar.
3. Las preguntas 2, 4 y 8 relacionadas con los ejes y semiejes de la elipse causaron confusión en los estudiantes; la pregunta relacionada con el valor del semieje menor, fue la que tuvo el porcentaje más bajo en la sesión en línea.



La visualización que hicieron los estudiantes a lo largo de las actividades les permitió, con ayuda del profesor, entender y reflexionar sobre el concepto.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como hemos mencionado en la autoevaluación, las experiencias que se pusieron en marcha han permitido arribar a las siguientes consideraciones:

1. La estructura de la secuencia permite a los estudiantes construir elementos que les posibiliten, a partir de estos, entender y arribar en general de una manera adecuada a los aprendizajes y objetivos que se tenían al inicio; sin ser satisfactoria, ya que, como podemos observar, los resultados se establecen en un rango del 40% al 84% en la sesión en línea, siendo esta más exitosa que la sesión presencial que se estableció en rangos del 50% al 70%. Para poder argumentar por qué sucedió esto se deben considerar las condiciones en las que se realiza la actividad en línea, ya que no es posible tener un control sobre si el estudiante pudo o no copiar o recabar información del internet; en ese sentido, considero que los resultados de la sesión presencial dan un mejor panorama del logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes.
2. Teníamos la hipótesis de que el trazo que dejan los puntos en el plano, cuando se activa la función rastro, permitiría al estudiante por un lado percibir que son una infinidad de puntos los que conforman a la elipse, y por el otro que éstos satisfacen que la suma de sus distancias a un punto fijo y a una recta es la misma. Validamos esta hipótesis, ya que los resultados indican que la mayoría de los estudiantes, considerando ambas sesiones, logran interpretar y desarrollar sus ideas de manera adecuada para arribar al concepto de elipse, el cual es el objetivo principal del trabajo realizado. Sin embargo, es importante hacer un espacio para el análisis de las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender y construir el concepto de elipse como lugar geométrico
3. La actividad de identificación de los elementos de la elipse, aunque inicialmente causó conflicto por el lenguaje, confusión entre ejes y

semiejes; podríamos decir que los conceptos se construyen adecuadamente a partir de la visualización, esto se pudo observar en la retroalimentación de las actividades.

4. La secuencia y su evaluación necesitan ajustes para captar una mayor población de estudiantes que logren el aprendizaje: sin embargo, es una muy buena actividad ya que facilita el aprendizaje a través de la retroalimentación. La visualización que hicieron los estudiantes a lo largo de las actividades les permitió, con ayuda del profesor, entender y reflexionar sobre el concepto, así como también identificar los elementos que les impidieron llegar inicialmente a una respuesta satisfactoria, logrando entender la definición de elipse como lugar geométrico.

REFERENCIAS

ARCAVI, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

CCH, UNAM (2016). Programa de Estudios de Matemáticas Semestres I al IV.

CLEMENTS, M. Fifty Years of Thinking About Visualization and Visualizing in Mathematics Education: A Historical Overview. In: FRIED, M. N.; DREYFUS, T. (Ed.). *Mathematics & Mathematics Education*: Searching for Common Ground. Dordrecht: Springer, 2014. p. 177-192.

DÍAZ, J., Lagunes, C., Saucedo, M. y Recio, C. (2015). Matemáticas en la educación a distancia, una experiencia didáctica. Sexto Congreso Virtual Iberoamericano de Calidad en Educación Virtual y a Distancia, EduQ@2015. Recuperado de: http://www.eduqa.net/eduqa2015/images/ponencias/eje1/1_ai_Diaz_Juan_-_Lagunes_Cristina_-_Saucedo_Mario_-_Recio_Carlos_-_Matematicas_en_la_educacion_a_distancia_una_experiencia_didactica.pdf

DUVAL, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (ed.), Representations and Mathematics Visualization, (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

EZQUERRO, M. (2014). Uso de Geogebra en la enseñanza de geometría analítica en 40 de la ESO". Recuperado en septiembre de 2017 de: http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2428/ezquerro.garcia.pdf?sequence=1

LEHMAN, C. (1997). *Geometría analítica*. México: Editorial Limusa, pp. 149-154.

RUIZ, J. F. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la elipse como lugar geométrico en el grado décimo de la Institución Educativa Luis López de Mesa en el municipio de Medellín. Tesis Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Colombia.

SEPÚLVEDA López, Armando, & García García, Lorena. (2011). El uso de software dinámico en el estudio de problemas geométricos de variación. *Educación matemática*, *23*(2), 111-127. Recuperado en 08 de julio de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000200006&lng=es&tlng=es.


COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES